

حل سه پوسته متصل بهم سازه نگهبان جدید به روش نظری برای پایدارسازی ترانشه‌های راه

مقاله علمی-پژوهشی

علی مجیدپورخوئی*، گروه مهندسی عمران، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: amajidpour@tvu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۰۲ - پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

صفحه ۴۴۴-۴۳۱

چکیده

در راهسازی برای جلوگیری از ریزش خاک و هرجا که احتیاج به تکیه گاه جانبی برای جدار قائم خاکبرداری باشد از انواع سازه‌های نگهبان استفاده می‌شود. با توجه به اینکه در برابر نیروهای مساوی، پوسته‌ها ضخامت کمتری نسبت به دال‌های مسطح دارند و در نتیجه استفاده از آنها از نظر مصالح مصرفی اقتصادی‌تر است، لذا در این پژوهش، در جهت کاهش مصالح مصرفی، پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک با دیوارهای حایل وزنی بتنی تطبیق گردیده و یک فرم سازه‌ای جدید پیشنهاد گردیده است. سپس روش جدیدی برای محاسبه و آنالیز ارائه شده است. در این مقاله تلاش شده تا بر اساس نظریه پوسته‌ها و با در نظر گرفتن جنبه‌های فیزیکی و ریاضی مسئله، معادلات حاکم بر سازه جدید، ارائه شود. در حل مسئله دیوار نگهبان تشکیل شده از سه پوسته استوانه‌ای بتنی از اصول ریاضی و روش آنالیز نظری استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک، دیوارهای حایل وزنی بتنی، سازه‌های نگهبان، نظریه پوسته‌ها

۱- مقدمه

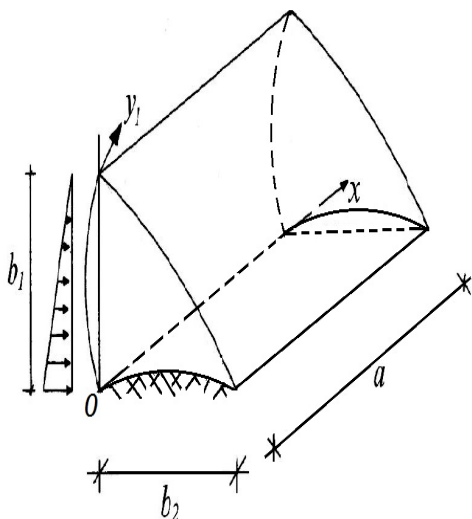
شود. قبلاً مطالعات زیادی توسط نویسنده این مقاله بر روی دیوارهای حایل از قبیل محاسبه پایداری و تناسب هندسی دیوار حایل جدید تشکیل شده از پوسته‌های استوانه‌ای مرکب (Majidpourkhoei, 2024)، کاربرد پوسته‌ها در کالبد شهرها (Majidpourkhoei, 2024)، ارائه دیوارهای حایل پوسته‌ای جدید جهت ساماندهی روش‌های پایدارسازی ترانشه‌های معابر شهری (Majidpourkhoei, 2015)، تطبیق پوسته استوانه‌ای مخازن با دیوارهای حایل طره‌ای پایدار (Majidpourkhoei, 2015)، انجام شده است. لیکن نتایج مطالعات در خصوص سبک سازی دیوارهای حایل وزنی بتنی به شکل و فرم پیشنهاد شده، برای اولین بار در این مقاله ارائه می‌شود. درک رفتار فرم پیشنهاد شده در این مقاله برای دیوار

در پروژه‌های مختلف عمرانی نظیر راهسازی، پل سازی و محوطه‌سازی از انواع دیوارهای حایل استفاده می‌شود. دیوارهای حایل را می‌توان بعنوان یکی از پرکاربردترین ابنیه راه به حساب آورد، کاربرد وسیع این سیستم، تدریجاً و با گذشت زمان مسائلی نو و مشکلاتی جدید را به میان آورده که علی‌رغم تحقیقاتی که تاکنون انجام گردیده، زمینه را برای مطالعات جدید فراهم نموده است. در این مقاله، برای سبک سازی دیوارهای حایل وزنی بتنی، پوسته‌های استوانه‌ای با دیوارهای حایل تطبیق شده است. سپس تلاش شده تا بنیان نظریه پوسته‌ها و جنبه‌های فیزیکی و ریاضی مباحث و کاربرد آن در مطالعات انجام شده برای دیوار حایل جدید مهیا شود و معادلات حاکم بر سازه جدید، ارائه و با استفاده از روش‌های ریاضی و کلاسیک حل

مصرفی دیوار حایل وزنی بطور تقریبی $0.5b_1, b_2$ در نظر گرفته شود. این میزان در دیوار حایل پوسته‌ای جدید $0.04b_1, b_2$ خواهد بود (b_2 عرض مقطع دیوار و b_1 ارتفاع دیوار می باشد).

با توجه به اینکه داخل دیوار حایل جدید و فضای مابین پوسته‌های بتنی برای افزایش پایداری با استفاده از خاک پر می‌شود لذا پوسته استوانه‌ای بالایی را نیز می‌توان بعنوان یک پوسته استوانه‌ای نشسته بر روی بستر الاستیک در نظر گرفت. فشار جانبی خاک وارد بر دیوار حایل از طریق خطوط اتصال و بهم پیوستگی پوسته استوانه‌ای جلویی با پوسته استوانه‌ای بالایی خواهد بود.

پوسته استوانه‌ای بالایی در محل خطوط اتصال با پوسته استوانه‌ای جلویی مقابل فشار خاک، از تغییر مکان‌های بزرگ آن جلوگیری نموده و بعنوان یک پشت بند برای پوسته استوانه‌ای جلویی عمل می‌کند. مطابق تئوری‌های فشار جانبی خاک، پوسته دیوار تحت اثر یک بار مثلثی ناشی از فشار فعال خاک قرار دارد. تناسب کلی و اندازه‌های دیوار حایل پیشنهاد شده، مشابه دیوار حایل وزنی بتنی در نظر گرفته شده است (شکل ۱).



شکل ۱. دیوار حایل جدید تشکیل شده از سه پوسته استوانه‌ای (شامل پوسته استوانه‌ای جلویی تحت اثر فشار خاک، پوسته استوانه‌ای زیرین قرار گرفته بر روی بستر الاستیک و پوسته استوانه‌ای بالایی)

حایل جدید تشکیل شده از سه پوسته استوانه‌ای و روش جدید محاسبات ریاضی ارائه شده مربوط به حل آن، نیازمند اشراف کامل به ساختار سازه‌های نگهدارنده و دیوارهای حایل موجود و نیز تسلط کامل به نظریه‌ها و ساختارهای پوسته‌ای و جنبه‌های فیزیکی و ریاضیات پیشرفته مهندسی است. برای این منظور تعدادی از متون انتخاب شده و مورد مطالعه در مورد مهندسی ژئوتکنیک و دیوارهای حائل موجود در بخش منابع آورده شده است (Barnes, 2000; Bowels, 1977; Dhoub, 2023). لازم به ذکر است که متون مربوط به تحلیل صفحه‌ها و پوسته‌ها متعدد می‌باشند، تعدادی از منابع منتخب و مطالعه شده در این خصوص نیز در بخش مراجع آورده شده است (Ciarlet, 2022; Gohnert, 2022; Mittelstedt, 2023; Timoshenko et al, 1959; Ugral, 1981).

هدف این پژوهش ارائه فرم جدیدی برای دیوارهای حایل وزنی بتنی است که بیشترین صرفه جویی را در مصرف بتن داشته و در عین حال قابلیت‌های استاتیکی و پایداری نیز تأمین شود. برای حل سازه‌ای فرم ارائه شده نیز روشی نو مبتنی بر اصول ریاضی و مکانیک مهندسی پیشنهاد شده است. در این مقاله، ریاضیات بکار رفته، فهم فیزیکی رفتار پوسته‌های بتنی در ساختار پیشنهاد شده را به صورت واضح ارائه می‌دهد. همچنین مسئله حل شده نقش موثری در جذب و درک مفاهیم اصلی و کاربرد عملی آنها دارد.

۲- حل مسئله دیوار نگهدارنده جدید تشکیل شده از سه پوسته استوانه‌ای

همانطوریکه در شکل ۱ نشان داده شده است اگر فضای داخلی دیوارهای حایل وزنی بتنی خالی در نظر گرفته شده و جداره‌های دیوار حایل وزنی بتنی، پوسته‌های استوانه‌ای بتنی فرض شود و برای افزایش پایداری آن، فضای خالی با خاک پر شود، دیوار حایل بدست آمده باعث صرفه جویی مقدار قابل توجهی در مصرف بتن می‌شود. بعبارت دیگر در این حالت برای المان برابر جلویی مقابل فشار خاک و المان زیرین (پی) نشسته بر روی بستر الاستیک خاک و برای المان نگهدارنده بالایی، پوسته استوانه‌ای بتنی در نظر گرفته می‌شود. استفاده از دیوار حایل تشکیل شده از سه پوسته، نسبت به دیوارهای حایل وزنی بتنی موجود، باعث صرفه جویی حدوداً ۹۰ درصد در مصرف بتن می‌شود. برای رسیدن به این منظور اگر سطح بتن

$$\begin{aligned} M_{y_1}^{(x)} \Big|_{y=b} &= M_{y_2}^{(x)} \Big|_{y=0} \\ N_{y_1}^{(x)} \Big|_{y=b} &= Q_{y_2}^*(x) \Big|_{y=0} \\ Q_{y_1}^*(x) \Big|_{y=b} &= N_{y_2}^{(x)} \Big|_{y=0} \\ N_{x_1 y_1}^{(x)} \Big|_{y=b} &= N_{x_2 y_2}^{(x)} \Big|_{y=0} \end{aligned} \quad (2)$$

به همین ترتیب شروط اتصال برای پوسته استوانه‌ای جلوئی با پوسته بالائی در محل $y=0$ نوشته می‌شود. شرایط مرزی استاتیکی مانند زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} M_{y_1}^{(x)} \Big|_{y=b} - M_{y_2}^{(x)} \Big|_{y=0} &= C_{x_1} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ N_{x_1}^{(x)} \Big|_{y=b} - Q_{y_2}^*(x) \Big|_{y=0} &= B_{xH} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \\ Q_{y_1}^*(x) \Big|_{y=b} - N_{y_2}^{(x)} \Big|_{y=0} &= B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ N_{x_1 y_1}^{(x)} \Big|_{y=b} - N_{x_2 y_2}^{(x)} \Big|_{y=0} &= EA_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

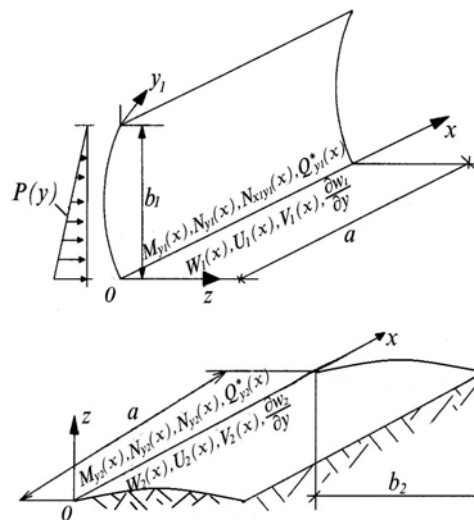
در روابط بالا EA_{x_1} ، B_x ، B_{xH} ، C_{x_1} سختی‌های خمشی، پیچشی و کششی در محل خطوط اتصال می‌باشند. سختی المان‌های صلبیت در محل اتصال را می‌توان چنان انتخاب نمود که پوسته‌های استوانه‌ای در محل خطوط اتصال بهم مفصلی، ساده و یا گیردار در نظر گرفته شوند. همه این حالتها مانند حالت خصوصی برای حل عمومی مسئله دیده می‌شود.

در $x=0$ و $x=a$ شرایط مرزی مانند زیر در نظر گرفته شده است.

$$w=0; \quad M_x=0; \quad N_x=0; \quad \varepsilon_y=0 \quad (4)$$

با استفاده از معادلات دیفرانسیل حاصل از حالت ترکیبی تئوری خمشی پوسته‌های استوانه‌ای، دیوار حایل جدید را به روش پیشنهاد شده زیر می‌توان حل نمود. ماهیت این روش به این ترتیب است که نیروهای داخلی و تغییر مکان‌های حاصل در محل خطوط اتصال، مجهول در نظر گرفته شده و با سری‌های فوریه تحلیل می‌شوند. برای پوسته جلوئی در محل خط $y=0$ نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_m E_m \sin \lambda_m x; \quad M_y(x) = \sum_m N_m \sin \lambda_m x \\ N_y(x) &= \sum_m \xi_m \sin \lambda_m x; \quad \varepsilon_x(x) = \sum_m \theta_m \sin \lambda_m x \end{aligned} \quad (5)$$



شکل ۲. تغییر مکان‌ها و نیروها در محل خطوط بهم پیوستگی پوسته‌ها

برای حل مسئله دیوار حایل پیشنهاد شده و تشکیل شده از سه پوسته استوانه‌ای از اصول مکانیک مهندسی و ریاضیات پیشرفته مهندسی استفاده می‌شود. برای رسیدن به این منظور، سه پوسته استوانه‌ای دیوار حایل جدید در محل خطوط اتصال، به پوسته‌های مستقل از هم جدا می‌شوند. در محل خطوط جدا شده، تغییر مکان‌ها و نیروهای داخلی ایجاد شده به مانند کمیت مجهول قبول شده است و تأثیر آنها را در محل خطوط اتصال به حالت بارهای گسترده فرض می‌شود. نحوه تأثیر این نیروها در سیستم اصلی دیوار حایل در شکل ۲ نشان داده شده است. در سیستم مختصات دکارتی قبول شده در محل $y=b$ ، هشت شرط اتصال نوشته شده است. از این هشت شرط، چهار شرط آن از نوع هندسی و چهار شرط دیگر از نوع شروط پایداری و استاتیکی خواهد بود. شروط هندسی در محل خطوط اتصال دو پوسته به هم مانند زیر مرتب شده است:

$$\begin{aligned} w_1(x) \Big|_{y=b} &= v_2(x) \Big|_{y=b} \\ v_1(x) \Big|_{y=b} &= w_2(x) \Big|_{y=b} \\ u_1(x) \Big|_{y=b} &= u_2(x) \Big|_{y=0} \\ \frac{\partial w_1(x)}{\partial y} \Big|_{y=b} &= \frac{\partial w_2(x)}{\partial y} \Big|_{y=0} \end{aligned} \quad (1)$$

برای شروط پایداری و استاتیکی با استفاده از معادلات تعادل می‌توان نوشت.

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a}; \mu_n = \frac{n\pi}{b}; y_b = \frac{y}{b}$$

$$F(y) = \frac{b^2}{6}(y_b^3 - 3y_b^2 + 2y_b)$$

$$\bar{F}(y) = \frac{b^2}{6}(y_b^3 - y_b)$$

$$m, n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

این روابط برای سایر پوسته‌های استوانه‌ای دیوار حایل از قبیل پوسته استوانه‌ای بالائی و نیز پوسته استوانه‌ای پایینی دیوار نیز نوشته شده و سپس به شرایط اتصال و بهم پیوستگی پوسته‌ها توجه می‌شود. برای این منظور ابتدا متدولوژی حل ریاضی معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود. فرض می‌شود که سری‌های فوریه در محل اتصال از هم جدا شده و در روابط ۵ و ۶ نیروها و تغییر مکان‌ها معلوم هستند. عبارت دیگر دومین بخش حل معادلات دیفرانسیل ۷ داده شده باشد. با در نظر گرفتن این شرط در حل معادلات ۷، معادلات دیفرانسیل اساسی ۸ را نوشته و سپس در بخش دوم با معلوم بودن روابط ۱۰ و ۱۱، سیستم معادلات دیفرانسیل به شکل زیر بدست می‌آید.

$$D\mathcal{A}w_o - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi_o}{\partial x^2} = Z_{ekv}(x, y) \quad (12)$$

$$\frac{1}{Eh} \mathcal{A}\phi_o + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} = P_{xy}(x, y)$$

در معادلات فوق $Z_{ekv}(x, y)$ و $P_{xy}(x, y)$ مجموع بارهای خارجی نامیده شده و با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شوند.

$$Z_{ekv}(x, y) = Z(x, y) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} - D\mathcal{A}w^*; \quad (13)$$

$$P_{xy}(x, y) = -\frac{1}{Eh} \mathcal{A}\phi^* - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}$$

بدون شک این روابط براساس اصول سری‌های فوریه قابل حل می‌باشند. سمت راست روابط ۱۲ را می‌توان بصورت سری‌های فوریه دو مرتبه ای نوشت.

$$Z_{ekv}(x, y) = \sum_m \sum_n Z_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y; \quad (14)$$

$$P_{xy}(x, y) = \sum_m \sum_n P_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

برای پوسته جلویی در محل خط $y = b$ نوشته می‌شود.

$$\bar{w}(x) = \sum_m \bar{E}_m \sin \lambda_m x; \quad \bar{M}_y(x) = \sum_m \bar{N}_m \sin \lambda_m x \quad (6)$$

$$\bar{N}_y(x) = \sum_m \bar{\xi}_m \sin \lambda_m x; \quad \bar{e}_x(x) = \sum_m \bar{\theta}_m \sin \lambda_m x$$

با معلوم شدن شرایط مرزی ۵ و ۶ در محل اتصال، حل واریانت‌های نظریه حاصل از معادلات دیفرانسیل تئوری پوسته‌های استوانه ای مانند زیر قبول می‌شوند.

$$w = w_o + w^*(x, y) \quad (7)$$

$$\phi = \phi_o + \phi^*(x, y)$$

حالت ترکیبی معادلات دیفرانسیل اصلی پوسته‌های استوانه‌ای جلویی به صورت زیر قبول شده است.

$$D\mathcal{A}w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = Z(y) \quad (8)$$

$$\frac{1}{Eh} \mathcal{A}\phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

در معادلات دیفرانسیل فوق، w_o و ϕ_o اجزاء اساسی در حل معادلات دیفرانسیل مذکور بوده و به شکل سری‌های فوریه زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$w_o = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (9)$$

$$\phi_o = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

حلول عمومی مسئله بوده که از شروط اتصال و بهم پیوستگی پوسته‌ها حاصل شده و طوری انتخاب می‌شوند که در محل خطوط اتصال و بهم پیوستگی دو پوسته استوانه‌ای شروط ۱ و ۲ تأمین شود.

$$w^*(x, y) = \sum_m \left\{ [(1-y_b) - \nu \lambda_m^2 F(y)] E_m + [y_b + \nu \lambda_m^2 \bar{F}(y)] \bar{E}_m + \frac{1}{D} [F(y) N_m - \bar{F}(y) \bar{N}_m] \right\} \sin \lambda_m x \quad (10)$$

$$\phi^*(x, y) = -\sum_m \left\{ \left[\frac{1}{\lambda m^2} (1-y_b) + \nu F(y) \right] \xi_m + [y_b - \nu \bar{F}(y)] \bar{\xi}_m + Eh [F(y) \theta_m - \bar{F}(y) \bar{\theta}_m] \right\} \sin \lambda_m x \quad (11)$$

$$A_{mn} = \frac{X(m,n)}{D(m,n)} + E_{1l}(m,n) [E_m - (-I)^n \bar{E}_m] +$$

$$+ E_{22}(m,n) [N_m - (-I)^n \bar{N}_m] + E_{33}(m,n) [\xi_m - (-I)^n \bar{\xi}_m] +$$

$$+ E_{44}(m,n) [\theta_m - (-I)^n \bar{\theta}_m]; \quad (18)$$

که در آنجا:

$$Z(m,n) = \frac{1}{Eh} \mathcal{A}_{mn}^2 q(m,n)$$

$$X(m,n) = \frac{1}{R} \lambda_m^2 q(m,n)$$

$$E_1(m,n) = \frac{2D\lambda_m^4 \Delta_{mn}^2}{n\pi Eh D(m,n)} \times$$

$$\times \left[1 - v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - 2v + \frac{Eh}{R^2 D \Delta_{mn}^2} \left(1 - v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) \right];$$

$$E_2(m,n) = \frac{2\lambda_m^2 \mathcal{A}_{mn}^2}{n\pi Eh D(m,n)} \left(2 + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} + \frac{Eh}{RD \mathcal{A}_{mn}^2} \cdot \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right);$$

$$E_3(m,n) = \frac{2\Delta_{mn}^2}{Ehn\pi D(m,n)R} \times$$

$$\times \left[1 + v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - \frac{\lambda_m^2}{\Delta_{mn}^2} \left(1 + v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} + 2v \right) \right]$$

$$E_4(m,n) = \frac{2\mathcal{A}_{mn}^2}{n\pi R D(m,n)} \left[\frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - \frac{\lambda_m^4}{\mathcal{A}_{mn}^4} \left(2 + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) \right];$$

$$E_{11}(m,n) = \frac{2D\lambda_m^2 \Delta_{mn}^2}{Rn\pi D(m,n)} \times$$

$$\times \left[1 - v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - \frac{\lambda_m^4}{\Delta_{mn}^2} \left(1 - v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - 2v \right) \right]$$

$$E_{22}(m,n) = \frac{2\mathcal{A}_{mn}^2}{n\pi RD(m,n)} \left[\frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - \frac{\lambda_m^4}{\mathcal{A}_{mn}^4} \left(2 + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) \right];$$

$$E_{33}(m,n) = \frac{2D\lambda_m^2 \Delta_{mn}^2}{Ehn\pi D(m,n)} \times$$

$$\times \left[1 + v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} + 2v + \frac{Eh}{D \Delta_{mn}^2 R^2} \left(1 + v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) \right];$$

$$E_{44}(m,n) = \frac{2D\lambda_m^4 \mathcal{A}_{mn}^2}{n\pi D(m,n)} \left[2 + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} + \frac{Eh}{R^2 D \mathcal{A}_{mn}^2} \cdot \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right]$$

که در اینجا $P_{mn} Z_{mn}$ ، ضرایب سری های فوریه می باشند و به شکل زیر تعیین می گردند.

$$Z_{mn} = \frac{4}{ab} \iint Z_{eky}(x,y) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx dy; \quad (14-1)$$

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \iint Z_{xy}(x,y) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx dy$$

بدین ترتیب معادلات دیفرانسیل ۱۲ را با استفاده از سری های فوریه دو مرتبه ای می توان حل نمود. با در نظر گرفتن سری های فوریه ۹ و ۱۴ و جایگزینی آنها در معادلات ۱۲، سیستم معادلات جبری دو مجهولی زیر حاصل می شود.

$$D \mathcal{A}_{mn}^2 B_{mn} + \frac{\lambda_m^2}{R} A_{mn} = Z_{mn} \quad (15)$$

$$- \frac{\lambda_m^2}{R} B_{mn} + \frac{1}{Eh} \mathcal{A}_{mn}^2 A_{mn} = P_{mn}$$

با حل سیستم معادلات جبری دو مجهولی ۱۵ و در نظر گرفتن ضرایب سری های فوریه B_{mn} و A_{mn} ، موارد زیر بدست می آید.

$$B_{mn} = \frac{1}{D(m,n)} \left(\frac{Z_{mn}}{Eh} \mathcal{A}_{mn}^2 - P_{mn} \frac{\lambda_m^2}{R} \right) \quad (16)$$

$$A_{mn} = \frac{1}{D(m,n)} \left(P_{mn} \mathcal{A}_{mn}^2 + Z_{mn} \frac{\lambda_m^2}{R} \right)$$

که در آنجا:

$$D(m,n) = \frac{D}{Eh} \mathcal{A}_{mn}^4 + \frac{\lambda_m^4}{R^2};$$

$$\mathcal{A}_{mn}^2 = (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2$$

سپس از یک سری عملیات انتگرال گیری روابط زیر بدست می آید.

$$B_{mn} = \frac{Z(m,n)}{D(m,n)} - E_1(m,n) [E_m - (-I)^n \bar{E}_m] -$$

$$- E_2(m,n) [N_m - (-I)^n \bar{N}_m] + E_3(m,n) [\xi_m - (-I)^n \bar{\xi}_m] +$$

$$+ E_4(m,n) [\theta_m - (-I)^n \bar{\theta}_m]; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} w^*(x, y) &= w_o^* + \bar{w}^*(x, y) \\ \phi^*(x, y) &= \phi_o^* + \bar{\phi}^*(x, y) \end{aligned} \quad (22)$$

W_o^* ، ϕ_o^* حل اساسی معادلات دیفرانسیل بوده که بوسیله سری‌های زیر پیدا می‌شود.

$$\begin{aligned} W_o^* &= \sum_m \sum_n B_{mn}^* \sin \lambda_m x \sin \mu_n y_l \\ \phi_o^* &= \sum_m \sum_n A_{mn}^* \sin \lambda_m x \sin \mu_n y_l \end{aligned} \quad (23)$$

که در آنجا:

$$\mu_{n_l} = \frac{n_l \pi}{b_l}; \quad m, n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

به همین روش شروط ۲۰ و ۲۱ در محل‌های اتصال همانند زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \bar{W}^*(x, y) &= \sum_m \left\{ [(1-y_{b1}) - v\lambda_m^2 F_1(y)] E_m^* + [y_{b1} + \right. \\ &\quad \left. + v\lambda_m^2 \bar{F}_1(y)] \bar{E}_m^* + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{D} [F_1(y) N_m^* - \bar{F}_1(y) \bar{N}_m^*] \right\} \sin \lambda_m x; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^*(x, y) &= -\sum_m \left\{ \frac{1}{\lambda_m^2} [(1-y_{b1}) - vF_1(y)] \xi_m^* + [y_{b1} \frac{1}{\lambda_m^2} - \right. \\ &\quad \left. - v\bar{F}_1(y)] \bar{\xi}_m^* + \right. \\ &\quad \left. + Eh [F_1(y) \theta_m^* - \bar{F}_1(y) \bar{\theta}_m^*] \right\} \sin \lambda_m x; \end{aligned} \quad (25)$$

که در آنجا:

$$F_1(y) = \frac{b^2}{6} (y_{b1}^3 - 3y_{b1}^2 + 2y_{b1});$$

$$\bar{F}_1(y) = \frac{b_1^2}{6} (y_{b1}^3 - y_{b1});$$

$$y_{b1} = \frac{y}{b_1}$$

به همین ترتیب معادلات دیفرانسیل پوسته‌های استوانه‌ای قرار گرفته بر روی بستر الاستیک و با در نظر گرفتن نیروهای ۲۰ و ۲۱ به شکل زیر بدست می‌آید.

$$D\Delta w_o^* - \frac{1}{R_l} \frac{\partial^2 \phi_o^*}{\partial x^2} + (K - K_s \Delta) w_o^* = Z_{ekv}^*(x, y); \quad (26)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta \phi_o^* + \frac{1}{R_l} \frac{\partial^2 w_o^*}{\partial x^2} = P_{ekv}^*(x, y)$$

با در نظر گرفتن فشار جانبی خاک وارد بر پوسته استوانه‌ای جلویی دیوار حایل، پارامتر $q(m, n)$ تعیین می‌شود با استفاده از شرایط پیوستگی و اتصال دو پوسته استوانه‌ای (۳۰) لازم است معادلات دیفرانسیل هر دو پوسته استوانه‌ای تشکیل داده شوند. با در نظر گرفتن معادلات دیفرانسیل پوسته استوانه‌ای جلویی (۸)، و نیز با توجه به قرار گرفتن پوسته استوانه‌ای زیرین بر روی بستر الاستیک، معادلات دیفرانسیل اصلی مانند زیر نوشته می‌شود.

$$D\Delta w^* - \frac{1}{R_l} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} + (K - K_s \Delta) w^* = q(x, y); \quad (19)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta \phi^* + \frac{1}{R_l} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = 0$$

در معادلات فوق K و K_s مشخصات الاستیک بوده بطوریکه K ضریب سختی فشاری خاک بستر و K_s ضریب سختی لغزشی خاک بستر می باشد. حل معادلات فوق بر اساس اصول سری‌های فوریه پیشنهاد شده در بالا ممکن بوده و به صورت زیر ارائه می شود. در اینجا نیز مجهولات بوجود آمده در محل خطوط اتصال شامل خیزها، ممان‌های خمشی، نیروی نرمال و کرنش‌های نسبی می‌باشند. با استفاده از سری‌های فوریه در محل خط $y_l = 0$ برای پوسته زیرین نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} w^*(x) &= \sum_m E_m^* \sin \lambda_m x; \quad M_y^*(x) = \sum_m N_m^* \sin \lambda_m x \\ N_y^*(x) &= \sum_m \xi_m^* \sin \lambda_m x; \quad \varepsilon_x^*(x) = \sum_m \theta_m^* \sin \lambda_m x \end{aligned} \quad (20)$$

در محل خط $y_l = b$ برای پوسته زیرین نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \bar{w}^*(x) &= \sum_m \bar{E}_m^* \sin \lambda_m x; \quad \bar{M}_y^*(x) = \sum_m \bar{N}_m^* \sin \lambda_m x \\ \bar{N}_y^*(x) &= \sum_m \bar{\xi}_m^* \sin \lambda_m x; \quad \bar{\varepsilon}_x^*(x) = \sum_m \bar{\theta}_m^* \sin \lambda_m x \end{aligned} \quad (21)$$

با توجه به شرایط مرزی ۲۰ و ۲۱ برای پوسته‌های استوانه‌ای نشسته بر روی بستر الاستیک و با در نظر گرفتن پوسته‌های استوانه‌ای جلویی حل معادلات ۱۹ مانند زیر در نظر گرفته شده است.

ضرایب اصلی معادلات دیفرانسیل پوسته‌های استوانه‌ای نشسته بر روی بستر الاستیک با حل معادلات جبری فوق تعیین می‌شود.

$$B_{mn}^* = \frac{1}{D^*(m,n)} \left[-P_{mn}^* \frac{\lambda_m^2}{R_1} + \frac{1}{Eh} \Delta_{mn}^2 Z_{mn}^* \right]$$

$$A_{mn}^* = \frac{1}{D^*(m,n)} \left[P_{mn}^* (D\Delta_{mn}^2 + K + K_s \Delta_{mn}) + \frac{1}{R_1} \lambda_m^2 Z_{mn}^* \right]$$

با یکسری عملیات انتگرال‌گیری برای ضرایب A_{mn}^* و B_{mn}^* موارد زیر بدست می‌آیند.

$$B_{mn}^* = \frac{Z^*(m,n)}{D^*(m,n)} - E_1^*(m,n) \left[E_m^* - (-I)^n \bar{E}_m^* \right] - E_2^*(m,n) \left[N_m^* - (-I)^n \bar{N}_m^* \right] + E_3^*(m,n) \left[\xi_m^* - (-I)^n \bar{\xi}_m^* \right] + E_4^*(m,n) \left[\theta_m^* - (-I)^n \bar{\theta}_m^* \right] \quad (۲۹)$$

$$A_{mn}^* = \frac{X^*(m,n)}{D^*(m,n)} - E_{11}^*(m,n) \left[E_m^* - (-I)^n \bar{E}_m^* \right] + E_{22}^*(m,n) \left[N_m^* - (-I)^n \bar{N}_m^* \right] + E_{33}^*(m,n) \left[\xi_m^* - (-I)^n \bar{\xi}_m^* \right] + E_{44}^*(m,n) \left[\theta_m^* - (-I)^n \bar{\theta}_m^* \right] \quad (۳۰)$$

که در آنجا:

$$Z^*(m,n) = \frac{\Delta_{mn}^2}{Eh} q(m,n);$$

$$q(m,n) = \frac{16q}{mn\pi^2};$$

$$X^*(m,n) = \frac{16q\lambda_{mn}^2}{Rmn\pi^2};$$

$$E_1^*(m,n) = \frac{2D\lambda_m^4 \Delta_{mn}^2}{n\pi Eh D^*(m,n)} \left[I - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - 2\nu + \frac{K}{D\lambda_m^2} \left(I - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) + \frac{K_s}{D\lambda_m^2} \left(I - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - \nu \right) + \frac{Eh}{R^2 D \Delta_{mn}^2} \left(I - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) \right];$$

$$E_2^*(m,n) = \frac{2D\lambda_m^4 \lambda_{mn}^2}{n\pi Eh D^*(m,n)} \left[2 + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} + \frac{K}{D\lambda_m^2 \mu_n^2} + \frac{K_s}{D\mu_n^2} \left(I + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) + \frac{Eh}{R^2 D \Delta_{mn}^2 \mu_n^2} \right];$$

$$E_3^*(m,n) = E_3(m,n) \frac{D(m,n)}{D^*(m,n)};$$

$$E_4^*(m,n) = E_4(m,n) \frac{D(m,n)}{D^*(m,n)};$$

که در معادلات فوق $P_{ekv}^*(x,y)$ ، $Z_{ekv}^*(x,y)$ مجموع بارهای مؤثر بر پوسته‌های استوانه‌ای قرار گرفته بر روی بستر الاستیک بوده که بوسیله روابط زیر تعیین می‌شوند.

$$Z_{ekv}^*(x,y) = q(x,y) - D\Delta^2 \bar{w}^* + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \bar{\phi}^*}{\partial x^2} - (K - K_s \Delta) \bar{w}^*; \quad (۲۷)$$

$$P_{ekv}^*(x,y) = -\frac{1}{Eh} \Delta^2 \bar{\phi}^* - \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial x^2}$$

روابط فوق به شکل سری‌های فوریه مانند روابط زیر نوشته می‌شود.

$$Z_{ekv}^*(x,y) = \sum_m \sum_n Z_{mn}^* \sin \lambda_m x \sin \mu_n y; \quad (۲۸)$$

$$P_{ekv}^*(x,y) = \sum_m \sum_n P_{mn}^* \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

که در اینجا Z_{mn}^* و P_{mn}^* ضرایب سری‌های فوریه بوده و مانند زیر تعیین می‌شوند.

$$Z_{mn}^* = \frac{4}{ab} \iint \left[q(x,y) - D\Delta^2 \bar{w}^* + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \bar{\phi}^*}{\partial x^2} - (K - K_s \Delta) \bar{w}^* \right] \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx dy$$

$$P_{mn}^* = -\frac{4}{ab} \iint \left(\frac{1}{Eh} \Delta^2 \bar{\phi}^* + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial x^2} \right) \times \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx dy$$

مقادیر \bar{w}^* و $\bar{\phi}^*$ معلوم بوده و توسط روابط ۲۴ و ۲۵ تعیین می‌شوند و ضرایب سری‌های فوریه نیز با انتگرال‌گیری به دست می‌آیند. با در نظر گرفتن روابط ۲۳ و ۲۸ در معادلات دیفرانسیل ۲۶ و یکسری عملیات، معادلات جبری زیر بدست می‌آیند.

$$\left[D\Delta_{mn}^2 + (K + K_s \Delta_{mn}) \right] B_{mn}^* + \frac{\lambda_m^2}{R_1} A_{mn}^* = Z_{mn}^*$$

$$-\frac{1}{R} \lambda_m^2 B_{mn}^* + \frac{1}{Eh} \Delta_{mn}^2 A_{mn}^* = P_{mn}^*$$

که در آنجا:

$$D^*(m,n) = \frac{1}{Eh} \Delta_{mn}^2 \left[D\Delta_{mn}^2 + (K + K_s \Delta_{mn}) \right] + \frac{\lambda_m^4}{R_1^2}$$

سری‌های زیر بدست می‌آیند. در محل خط اتصال $y=0$ با پوسته زیرین می‌توان نوشت.

$$w_2(x) = \sum_m E_m^{(2)} \sin \lambda_m x; \quad M_{y2}(x) = \sum_m N_m^{(2)} \sin \lambda_m x \quad (32)$$

$$N_{y2}(x) = \sum_m \xi_m^{(2)} \sin \lambda_m x; \quad \varepsilon_{x2}(x) = \sum_m \theta_m^{(2)} \sin \lambda_m x$$

در محل خط اتصال $y=b$ با پوسته جلویی می‌توان نوشت.

$$\bar{w}_2(x) = \sum_m \bar{E}_m^{(2)} \sin \lambda_m x; \quad \bar{M}_{y2}(x) = \sum_m \bar{N}_m^{(2)} \sin \lambda_m x \quad (33)$$

$$\bar{N}_{y2}(x) = \sum_m \bar{\xi}_m^{(2)} \sin \lambda_m x; \quad \bar{\varepsilon}_{x2}(x) = \sum_m \bar{\theta}_m^{(2)} \sin \lambda_m x$$

حل سیستم معادلات دیفرانسیل مانند زیر ارائه می‌شود.

$$w_2 = w_{20} + w_{20}^*(x, y) \quad (34)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{20} + \varphi_{20}^*(x, y)$$

با استفاده از سری‌های فوریه می‌توان نوشت:

$$w_{20} = \sum_m \sum_n B_{mn}^{(2)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (35)$$

$$\varphi_{20} = \sum_m \sum_n A_{mn}^{(2)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y$$

با در نظر گرفتن شروط پیوستگی و اتصال ۳۳ و ۳۴ می‌توان نوشت:

$$w_{20}^*(x, y) = \sum_m \left\{ \left[(1-y_{b2}) - v \lambda_m^2 F_2(y) \right] E_m^{(2)} + [y_{b2} + v \lambda_m^2 \bar{F}_2(y)] \bar{E}_m^{(2)} + \frac{1}{D} \left[F_2(y) N_m^{(2)} - \bar{F}_2(y) \bar{N}_m^{(2)} \right] \right\} \sin \lambda_m x; \quad (36)$$

$$\varphi_{20}^*(x, y) = -\sum_m \left\{ \left[\frac{1}{\lambda_m^2} (1-y_{b2}) + v F_2(y) \right] \xi_m^{(2)} + \left[\frac{1}{\lambda_m^2} y_{b2} - v \bar{F}_2(y) \right] \bar{\xi}_m^{(2)} + E h \left[F_2(y) \theta_m^{(2)} - \bar{F}_2(y) \bar{\theta}_m^{(2)} \right] \right\} \sin \lambda_m x$$

که در آنجا:

$$E_{11}^*(m, n) = \frac{2D\lambda_m^2 \mathcal{A}_{mn}^2}{Rn\pi D^*(m, n)} \left\{ I - v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - \frac{\lambda_m^4}{\mathcal{A}_m^2} \left[I - v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - 2v + \frac{K}{D\lambda_m^4} \left(I - v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) + \frac{K_s}{D\lambda_m^2} \left(I - v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - v \right) \right] \right\};$$

$$E_{22}^*(m, n) = \frac{2\mathcal{A}_{mn}^2}{n\pi R D^*(m, n)} \left[\frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - \frac{\lambda_m^4}{\mathcal{A}_m^2} \left(2 + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) + \frac{K}{D\lambda_m^2 \mu_n^2} + \frac{K_s}{D\mu_n^2} \left(I + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) \right];$$

$$E_{33}^*(m, n) = \frac{2D\lambda_m^2 \mathcal{A}_{mn}^2}{Ehn\pi D^*(m, n)} \left[I + v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} + 2v + \frac{Eh}{D\mathcal{A}_{mn}^2 R^2} \left(I + v \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) \right];$$

$$E_{44}^*(m, n) = \frac{2D\lambda_m^2 \mathcal{A}_{mn}^2}{n\pi D^*(m, n)} \left[2 + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} + \frac{Eh}{D\mathcal{A}_{mn}^2 R^2} \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right]$$

در مرحله آخر برای پوسته سوم یعنی پوسته استوانه‌ای بالایی معادلات دیفرانسیل تشکیل می‌شود. پوسته‌های استوانه‌ای بالایی دیوار حایل صرفاً وزن خود را تحمل نموده و فشار جانبی خاک وارد بر دیوار حایل از طریق خطوط اتصال و بهم پیوستگی پوسته استوانه‌ای جلویی با پوسته استوانه‌ای بالایی خواهد بود. پوسته استوانه‌ای بالایی در محل خطوط اتصال با پوسته استوانه‌ای جلویی از تغییر مکان‌های بزرگ آن جلوگیری نموده و بعنوان یک پشت بند برای پوسته استوانه‌ای جلویی عمل می‌کند. معادلات دیفرانسیل اصلی پوسته‌های استوانه‌ای جلویی دیوار حایل مانند زیر در نظر گرفته شده است.

$$D\mathcal{A} w_2 - \frac{I}{R_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + K w_2 = q \quad (37)$$

$$\frac{1}{Eh} \mathcal{A} \varphi_2 + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0$$

با توجه به اینکه داخل دیوار حایل و فضای مابین پوسته‌ها با استفاده از خاک پر می‌شود، لذا پوسته استوانه‌ای بالایی را نیز می‌توان بعنوان یک پوسته استوانه‌ای نشسته بر روی بستر الاستیک در نظر گرفت، در معادله فوق K سختی فشاری خاک پر شده در فضای مابین پوسته‌ها می‌باشد. q بار مؤثر وارد بر پوسته استوانه‌ای بالایی می‌باشد. تغییر مکان‌ها و نیروهای داخلی ایجاد شده در محل خطوط اتصال پوسته‌های استوانه‌ای بالایی با پوسته‌های استوانه‌ای جلویی و زیرین با استفاده از

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} w$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{Eh} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

مقادیر مربوط به تغییر مکان‌ها مانند زیر تعیین می‌شوند.

$$u = \frac{1}{Eh} \sum_m \sum_n \frac{1}{\lambda_m} (\mu_n^2 - \nu \lambda_m^2) A_{mn} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y +$$

$$+ \frac{1}{Eh} \sum_m \frac{1}{\lambda_m} \left\{ \nu^2 F(y) \xi_m - \nu^2 \bar{F}(y) \bar{\xi}_m + Eh \left[(1 - \nu) \theta_m \right] + \right. \quad (40)$$

$$\left. + \nu \lambda_m^2 F(y) \theta_m + Eh \left[\nu b - \nu \lambda_m^2 \bar{F}(y) \right] \bar{\theta}_m \right\} \cos \lambda_m x$$

$$v = -\frac{1}{Eh} \sum_m \sum_n \frac{1}{\lambda_m^2} \left[\mu_n^3 + (2 + \nu) \lambda_m^2 \mu_n \right] \times$$

$$\times A_{mn} \sin \lambda_m x \cos \mu_n y +$$

$$+ \frac{1}{Eh} \sum_m \left\{ \frac{2 + \nu}{b} \left[1 - \frac{\nu b^2 \lambda_m^2}{6} (3y_b^2 - 6y_b + 2) \right] + \frac{\nu}{b} \right\} \xi_m +$$

$$+ \left[\frac{2 + \nu}{b} \left[1 - \frac{\nu b^2 \lambda_m^2}{6} (3y_b^2 - 1) \right] + \frac{\nu}{a} \right] \bar{\xi}_m + \quad (41)$$

$$+ \frac{Eh}{b} \left[\frac{2 + \nu}{6} b^2 \lambda_m^2 (3y_b^2 - 6y_b + 2) - 1 \right] \theta_m -$$

$$- \frac{Eh}{b} \left[\frac{2 + \nu}{6} b^2 \lambda_m^2 (3y_b^2 - 1) - 1 \right] \bar{\theta}_m \left\} \frac{1}{\lambda_m^2} \sin \lambda_m x$$

در روابط فوق در محل خطوط $y=0$ و $x=0$ و $x=a$ شرایط $u=0$ و $v=0$ تأمین شده است.

$$E_m^{(1)} = -\frac{1}{Eh} \sum_m \frac{1}{\lambda_m^2} \left\{ \left[\mu_n^3 + (2 + \nu) \lambda_m^2 \mu_n \right] A_{mn}^{(2)} + \right. \quad (42)$$

$$+ \frac{1}{Eh} \frac{1}{\lambda_m^2} \left\{ -\frac{2 + \nu}{b} \left(1 - \frac{\nu b^2 \lambda_m^2}{6} \right) \xi_m^{(2)} + \frac{2 + \nu}{b} \left(1 + \frac{\nu b^2 \lambda_m^2}{6} \right) \bar{\xi}_m^{(2)} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{Eh}{6} \left[\left(\frac{2 + \nu}{3} b^2 \lambda_m^2 - 1 \right) \theta_m + \frac{Eh}{b} \left(1 - \frac{2 + \nu}{6} b^2 \lambda_m^2 \right) \bar{\theta}_m \right] \right\} \right\}$$

$$F_2(y) = \frac{b_2^2}{6} (y_{b2}^3 - 3y_{b2}^2 + 2y_{b2});$$

$$\bar{F}_2(y) = \frac{b_2^2}{6} (y_{b2}^3 - y_{b2});$$

$$y_{b2} = \frac{y}{b_2}$$

برای پوسته استوانه‌ای بالایی همانند پوسته استوانه‌ای زیرین می‌توان نوشت.

$$B_{mn}^{(2)} = \frac{Z_2(m, n)}{D_2(m, n)} - E_1^{(2)}(m, n) \left[E_m^{(2)} - (-I)^n \bar{E}_m^{(2)} \right] -$$

$$- E_2^{(2)}(m, n) \left[N_m^{(2)} - (-I)^n \bar{N}_m^{(2)} \right] + E_3^{(2)}(m, n) \left[\xi_m^{(2)} - (-I)^n \bar{\xi}_m^{(2)} \right] + \quad (37)$$

$$+ E_4^{(2)}(m, n) \left[\theta_m^{(2)} - (-I)^n \bar{\theta}_m^{(2)} \right]$$

$$A_{mn}^{(2)} = \frac{X_2(m, n)}{D_2(m, n)} + E_{11}^{(2)} \left[E_m^{(2)} - (-I)^n \bar{E}_m^{(2)} \right] +$$

$$+ E_{22}^{(2)}(m, n) \left[N_m^{(2)} - (-I)^n \bar{N}_m^{(2)} \right] + E_{33}^{(2)}(m, n) \left[\xi_m^{(2)} - (-I)^n \bar{\xi}_m^{(2)} \right] + \quad (38)$$

$$+ E_{44}^{(2)} \left[\theta_m^{(2)} - (-I)^n \bar{\theta}_m^{(2)} \right]$$

که در آنجا:

$$D_2(m, n) = \frac{1}{Eh} \mathcal{A}_{mn}^4 (D \mathcal{A}_{mn}^2 + K) + \frac{\lambda_m^4}{R_2^2};$$

$$E_1^{(2)}(m, n) = \frac{2D \lambda_m^4 \mathcal{A}_{mn}^2}{n \pi E h D_2(m, n)} \left[1 - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - 2\nu + \frac{K}{D \lambda_m^4} \left(1 - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{Eh}{R^2 D \mathcal{A}_{mn}^4} \left(1 - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) \right];$$

$$E_2^{(2)}(m, n) = \frac{2 \lambda_m^2 \mathcal{A}_{mn}^2}{n \pi E h D_2(m, n)} \left[2 + \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} + \frac{K}{D \lambda_m^2 \mu_n^2} + \frac{Eh}{R^2 D \mathcal{A}_{mn}^4} \cdot \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right];$$

$$E_3^{(2)}(m, n) = E_3(m, n) \cdot \frac{D(m, n)}{D_2(m, n)};$$

$$E_4^{(2)}(m, n) = E_4(m, n) \cdot \frac{D(m, n)}{D_2(m, n)};$$

$$E_{11}^{(2)}(m, n) = \frac{2D \lambda_m^2 \mathcal{A}_{mn}^2}{R n \pi D_2(m, n)} \left\{ 1 - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - \frac{\lambda_m^4}{\mathcal{A}_{mn}^4} \left[1 - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - 2\nu + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{K}{D \lambda_m^4} \left(1 - \nu \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) \right] \right\};$$

در روابط فوق $K_s = 0$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از تئوری الاستیسیته نوشته می‌شود.

$$\left(\frac{\lambda_m}{b\lambda_m^2} - \frac{vb\lambda_m}{3\lambda_m^2}\right)\xi_m^{(1)} + \left(\frac{\lambda_m}{b\lambda_m^2} - \frac{v\lambda_m}{6\lambda_m^2}\right)\bar{\xi}_m^{(1)} + \frac{Eh\lambda_m b}{3}\theta_m^{(1)} + \frac{Eh\lambda_m b}{6}\bar{\theta}_m^{(1)} \quad (49)$$

در معادلات جبری فوق با در نظر گرفتن روابط ۱۷ و ۱۸ و ۲۹ و ۳۰، سیستم معادلات جبری زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} & a_m^{(1)}(i)E_m^{(1)} + \bar{a}_m^{(1)}(i)\bar{E}_m^{(1)} + b_m^{(1)}(i)N_m^{(1)} + \\ & + \bar{b}_m^{(1)}(i)\bar{N}_m^{(1)} + c_m^{(1)}(i)\xi_m^{(1)} + \bar{c}_m^{(1)}(i)\bar{\xi}_m^{(1)} + \\ & + d_m^{(1)}(i)\theta_m^{(1)} + \bar{d}_m^{(1)}(i)\bar{\theta}_m^{(1)} + a_m^{(2)}(i)E_m^{(2)} + \\ & + \bar{a}_m^{(2)}(i)\bar{E}_m^{(2)} + b_m^{(2)}(i)N_m^{(2)} + \bar{b}_m^{(2)}(i)\bar{N}_m^{(2)} + \\ & + c_m^{(2)}(i)\xi_m^{(2)} + \bar{c}_m^{(2)}(i)\bar{\xi}_m^{(2)} + d_m^{(2)}(i)\theta_m^{(2)} + \\ & + \bar{d}_m^{(2)}(i)\bar{\theta}_m^{(2)} = \delta_m(i) \end{aligned} \quad (50)$$

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

که در آنجا:

$$\delta_m(1) = \frac{1}{Eh} \sum_n \frac{1}{\lambda_m^2} [\mu_n^3 + (2+v)\lambda_m^2 \mu_n] \frac{X_2(m, n)}{D_2(m, n)};$$

$$\delta_m(2) = \frac{1}{Eh} \sum_n \frac{1}{\lambda_m^2} [\mu_n^3 + (2+v)\lambda_m^2 \mu_n] \frac{X_1(m, n)}{D_1(m, n)};$$

$$\delta_m(3) = 0; \quad \delta_m(4) = \sum_n \lambda_m \frac{Z_1(m, n)}{D_1(m, n)}; \quad \delta_m(5) = 0;$$

$$\delta_m(6) = \sum_n A_{mn}^{2-v} \frac{Z_2(m, n)}{D_2(m, n)};$$

$$\delta_m(7) = \sum_n A_{mn}^{2-v} \frac{Z_1(m, n)}{D_2(m, n)}$$

$$\delta_m(8) = 0$$

بدین ترتیب با حل سیستم معادلات جبری ۵۰ در محل خطوط اتصال پوسته‌ها، مسئله دیوار حایل تشکیل شده از سه پوسته استوانه‌ای حل می‌شود. محل اتصال پوسته‌های استوانه‌ای جلویی و زیرین دیوار حایل بصورت صلب و گیردار بوده و محل اتصال پوسته‌های استوانه‌ای بالایی با دیگر پوسته‌ها به صورت مفصلی می‌باشد (شکل ۳).

$$\begin{aligned} E_m^{(2)} = & -\frac{1}{Eh} \sum_n \frac{1}{\lambda_m^2} [\mu_n^3 + (2+v)\lambda_m^2 \mu_n] A_{mn}^{(1)} + \\ & + \frac{1}{Eh\lambda_m^2} \left\{ -\frac{2+v}{b} \left(1 - \frac{v\lambda_m^2}{3}\right) \xi_m^{(1)} + \frac{2+v}{b} \left(1 + \frac{v\lambda_m^2}{b}\right) \bar{\xi}_m^{(1)} + \right. \\ & \left. + \frac{Eh}{b} \left[\left(1 - \frac{2+v}{3} b^2 \lambda_m^2\right) \theta_m^{(1)} - \left(1 + \frac{2+v}{6} b^2 \lambda_m^2\right) \bar{\theta}_m^{(1)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\theta_m^{(1)} = \bar{\theta}_m^{(2)}; \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \lambda_m B_{mn}^{(1)} - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{v\lambda_m^2}{3}\right) E_m^{(1)} + \\ & + \frac{1}{b} \left(1 - \frac{v\lambda_m^2 b^2}{6}\right) \bar{E}_m^{(1)} + \\ & + \frac{b}{3D} \bar{N}_m^{(1)} + \frac{b}{6D} \bar{N}_m^{(1)} = \sum_n \lambda_m B_{mn}^{(2)} + \\ & + \frac{1}{b} \left(1 - \frac{v\lambda_m^2 b^2}{6}\right) \bar{E}_m^{(2)} - \\ & - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{v\lambda_m^2}{3}\right) E_m^{(2)} + \frac{b}{3D} N_m^{(2)} + \frac{b}{6D} \bar{N}_m^{(2)} \end{aligned} \quad (45)$$

$$N_m^{(1)} = \bar{N}_m^{(2)}; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \xi_m^{(1)} = & \sum_m \Delta_{mn}^{(2-v)} B_{mn}^{(2)} + \\ & + \left[v\lambda_m^2 + (2-v)\lambda_m^2 \left(-1 - \frac{v\lambda_m^2 b^2}{3}\right) \right] E_m^{(2)} + \\ & + \left[v\lambda_m^2 + (2-v)\lambda_m^2 \left(1 + \frac{v\lambda_m^2 b^2}{6}\right) \right] \bar{E}_m^{(2)} + \\ & + \frac{1}{D} \left(1 + \frac{2-v}{3} \lambda_m^2 b^2\right) \bar{N}_m^{(2)} - \\ & - \frac{1}{D} \left(1 - \frac{2-v}{6} b^2 \lambda_m^2\right) \bar{N}_m^{(2)}; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \xi_m^{(2)} = & \sum_m A_{mn}^{2-v} B_{mn}^{(1)} + \lambda_m^2 \left[v - (2-v) \left(1 - \frac{v\lambda_m^2 b^2}{3}\right) \right] E_m^{(1)} + \lambda_m^2 [v + \\ & + (2-v) \left(1 + \frac{v\lambda_m^2 b^2}{6}\right)] E_m^{(1)} + \frac{1}{D} \left(1 + \frac{2-v}{3} b^2 \lambda_m^2\right) \bar{N}_m^{(2)} - \\ & - \frac{1}{D} \left(1 - \frac{2-v}{6} b^2 \lambda_m^2\right) \bar{N}_m^{(2)}; \end{aligned} \quad (48)$$

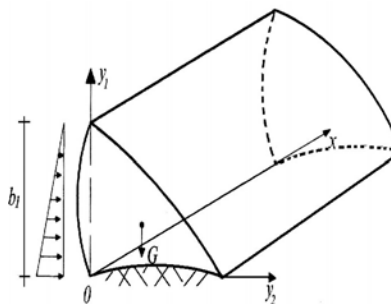
بر دیوارهای حایل به دست آمده است، که می‌تواند بعنوان تحقیقات بعدی توسط برنامه‌های رایانه‌ای نیز پیاده سازی و مقایسه گردد.

۵- نتیجه گیری

پژوهشی که نتایج آن در این مقاله ارائه گردید، برای اولین بار روشی را جهت محاسبه و آنالیز دیوار حایل سبک سازی شده پوسته‌ای به شکل و فرم پیشنهاد شده، با استفاده از اصول ریاضی و سریهای فوریه ارائه می‌کند. همچنین برای اولین بار پوسته‌های استوانه‌ای با دیوارهای حایل وزنی بتنی به شکل و فرم پیشنهاد شده در این مقاله، تطبیق گردیده است.

یکی از اقدامات اصلی مربوط به طراحی سازه‌های پوسته‌ای انتخاب شکل هندسی و طراحی سازمان انتقال نیرو توسط سازه پوسته‌ای می‌باشد. توجه به شکل کلی سازه و چگونگی ارتباط پوسته اصلی با عناصر دیگر یکی از ملاحظات مهم در طراحی سازه‌های پوسته‌ای است، این نقطه از لحاظ رفتار سازه و تعادل و پایداری کلی آن بویژه عملکرد سازه در مقابل نیروها اهمیت دارد. در سازه جدید پیشنهاد شده برای دیوار حایل نیز به این نکات توجه گردیده است.

کاربرد ساختارهای پوسته‌ای بتنی در سازه پیشنهاد شده برای سبک سازی دیوارهای حایل وزنی بتنی با توجه به صرفه جوئی قابل ملاحظه در مصرف بتن، اهمیت ویژه‌ای به این پژوهش داده است، بررسی مقادیر بدست آمده برای حجم بتن مصرفی دیوارهای حایل وزنی بتنی موجود با دیوار حایل سبک سازی شده پوسته‌ای پیشنهاد شده در این تحقیق، نشان می‌دهد که استفاده از دیوارهای حایل پوسته‌ای بتنی، باعث صرفه جوئی قابل توجهی در مصرف بتن می‌شود (حدود ۹۰ درصد). لذا استفاده از دیوارهای حایل پوسته‌ای مقرون به صرفه‌تر خواهد بود. زیرا در برابر نیروهای مساوی، پوسته‌ها ضخامت کمتری نسبت به دالهای مسطح دارند و این بعلاوه کیفیت عملکرد رفتاری پوسته‌ها در مقابل نیروهای وارده، نسبت به دالهای مسطح می‌باشد.



شکل ۳. انتخاب محورهای مختصات بر روی دیوار حایل تشکیل شده از سه پوسته استوانه‌ای

برای پوسته‌های استوانه‌ای جلویی، شرایط مرزی مسئله در محل خطوط $y_1 = 0$ یا $y_2 = 0$ ، به صورت زیر است.

$$w_1(x) = 0; \quad v_1(x) = 0; \quad u_1(x) = 0; \quad \frac{\partial w_1(x)}{\partial y} = 0$$

برای پوسته‌های استوانه‌ای زیرین می‌توان نوشت.

$$w_2(x) = 0; \quad v_2(x) = 0; \quad u_2(x) = 0; \quad \frac{\partial w_2(x)}{\partial y} = 0$$

شرایط مرزی در محل خطوط $y_1 = b_1$ و $y_2 = b_2$ ، در حالت مفصلی به صورت زیر است.

$$M_{y_1}(x) = 0; \quad w_1(x) = 0; \quad u_1(x) = 0; \quad N_{y_1}(x) = 0$$

محاسبات ارائه شده در این مقاله براساس روش نظری و بر پایه اصول استوار و دقیق ریاضی انجام شده است. روش‌های نظری بر پایه اصول ریاضی و مکانیک اثبات شده مهندسی جز روش‌های سخت و پیچیده و در عین حال دقیق محاسباتی محسوب می‌شوند، بطوریکه روش‌های محاسباتی دقیق نظری معمولاً مبنای برنامه نویسی نرم افزارهای محاسباتی و برای اعتبارسنجی روش‌های تقریبی و نتایج حاصل از محاسبات نرم افزاری به کار می‌روند. در عین حال می‌توان نمونه‌های تجربی و شبیه سازی شده برای ساختار جدید ارائه نمود که از حوصله این مقاله خارج بوده و برای مطالعات و مقالات آتی توصیه می‌شود. معادلات ریاضی تشریح کننده سازه جدید از آنالیز یک ساختار پیشنهاد شده واقع گرایانه مبتنی بر اصول مهندسی حاکم

۶- مراجع

- Majidpourkhoei, A. (2015). Offer new shell retaining walls to improve methods for stabilizing trenches urban roads with the approach of Islamic identity to urban space. *Third International Congress on Civil Engineering & Architecture and Urban Development, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran*, [In Persian].
- Majidpourkhoei, A. (2015). Problem solving of the new buttress retaining wall composed of reservoirs shell and forces imposed on them". *Indian Journal of Fundamental and Applied Life Sciences*, 5(S3), 1295-1302.
- Mittelstedt, C. (2023). Theory of plates and shells. *Berlin: Springer Vieweg Publishing*.
doi.org/10.1007/978-3-662-66805-4
- Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of plates and shells. *Second Edition, New York: McGraw Hill*.
- Ugural, A.C. (1981). Stresses in plates and shells, *New York: McGraw Hill*.
- Barnes, G.E. (2000). Soil mechanics-principles & practice, Second Edition, Italy, *Palgrave Publications*.
- Bowels, J.E. (1977). Foundation analysis and design. Second Edition. New York, *McGraw Hill Book Company*.
- Dhouib, A. (2023). Applied geotechnics for construction projects: retaining structures & soil reinforcement and Improvement. Vol. 4, New York, *John Wiley & Sons Publishing*.
- Ciarlet, P.G. (2022). Mathematical elasticity: theory of shells. Vol. 3, Philadelphia, *Society for Industrial and Applied Mathematics Publishing*.
doi.org/10.1137/1.9781611976823
- Gohnert, M. (2022). Shell structures-theory and application. Switzerland: *Springer International Publishing*.
doi.org/10.1007/978-3-030-84807-1
- Majidpourkhoei, A. (2024). Calculation on stability and common proportions of the new retaining wall formed from cylindrical shells. *Journal of Materials and Environmental Science*, 15(1), 42-54.
- Majidpourkhoei, A. (2024). The use of shells in the body of cities as the soul of Iranian structures with Islamic identity. *Third International Conference on Architecture & Civil Engineering & Urban Development & Environment and Horizons of Islamic Art in the Second Step Statement of the Revolution, Tabriz Islamic Art University, Tabriz, Iran*.

Solving of Three Interconnected Shells of the New Retaining Structure by Theoretical Method for Stabilizing Road Trenches

Ali Majidpourkhoei, Department of Civil Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

E-mail: amajidpour@tvu.ac.ir

Received: May 2025- Accepted: August 2025

ABSTRACT

In road construction, to prevent the fall of soil and wherever there is a need for lateral support for the vertical wall of excavation, a variety of retaining structures are used. Considering that against equal forces, shells are less thick than flat slabs, and as a result, their use is more economical in terms of consumables, Therefore, in this research, in order to reduce the consumption of materials, thin-walled cylindrical shells have been adapted to concrete gravity retaining walls and a new structural form has been proposed. Then a new method for calculation and analysis is provided. In this article, based on the theory of cylindrical shells and considering the physical and mathematical aspects of the problem, the governing equations of the new structure have been presented. Mathematical principles and theoretical analysis methods have been used in solving the problem of the retaining wall consisting of three concrete cylindrical shells.

Keywords: Concrete Gravity Retaining Walls, Thin Cylindrical Shells, Theory of Shells, Retaining Structures