به‌کارگیری توابع چگالی و طول صف در مدل‌های تخصیص پویای میان‌نگر

مقاله علمی – پژوهشی

شهریار افندی‌زاده*، استاد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
محمد فلاح، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
نوید کلانتری، دانش آموخته دکتری، مدیر مشاور، AECOM، واشینگتن، آمریکا
*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: zargari@iust.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۲۷– پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۲۵
صفحه ۳۲-۱۵

چکیده

یکی از روش‌های سنتی برای بهبود وضع شبکه‌ها، ساخت راه‌های جدید است که امروزه به‌خصوص در مناطق شهری پرازدحام و شلوغ، به دلیل بالا بودن هزینهٔ ساخت آن، دیگر گزینهٔ مطلوبی به نظر نمی‌رسد. روش‌های مدیریت ترافیک یکی از گزینه‌های مؤثر در این امر به شمار می‌آیند. مسئلهٔ تخصیص ترافیک به‌ویژه تخصیص ترافیک پویا، با فراهم‌آوردن بستری برای بررسی وضعیت شبکهٔ موردمطالعه و همچنین ایجاد الگوی جریان ترافیک، یکی از ابزارها و اجزای مهم در بحث مدیریت ترافیک می‌باشد. در این پژوهش با بهره‌گیری از یک روش بارگذاری شبکهٔ پویای مبتنی بر مدل گسترش شبکهٔ LWR، مسئلهٔ بارگذاری شبکهٔ پویا به‌عنوان یک سیستم معادلات جبری دیفرانسیلی فرموله می‌گردد. مدل بارگذاری شبکهٔ پویای حاصله، قادر به شکل‌گیری، انتشار و اتلاف صف‌های فیزیکی است. این پژوهش برای حل مسائل تعادل کاربر پویا از الگوریتمی بر اساس فرمول نقطه ثابت بهره می‌برد. سپس بستهٔ نرم‌افزاری به زبان ++c جهت پیاده‌سازی هر دو سیستم معادلات جبری دیفرانسیلی و الگوریتم نقطه ثابت با درنظرگرفتن پس‌زدگی صف ایجاد می‌شود. برنامهٔ نام‌برده به‌گونه‌ای توسعه یافته است که می‌توان از آن برای حل مسائل تعادل کاربر پویا و بارگذاری شبکهٔ پویا در هر شبکهٔ بزرگ‌مقیاس به کار گرفته شود. برنامهٔ نوشته شده جهت آزمایش برای شبکهٔ شهری شیکاگو با ۸۶۱۷۹ جفت مبدأ - مقصد و ۲۵۰۰۰۰ مسیر پیاده‌سازی شده و پس از ۶۹ بار تکرار با درنظرگرفتن آستانهٔ ۰/۰۰۱ به همگرایی می‌رسد. در انتها نتایج این پژوهش مورد ارزیابی قرار گرفته و صحت نتایج حاصل نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: تخصیص ترافیک پویا، بزرگ‌مقیاس، میان‌نگر، صف و پس‌زدگی جریان

۱-مقدمه

مرچانت و نمهاوز (Merchant, DK., Nemhauser, GL. (1978)) برای اولین‌بار به‌صورت جدی مسئلهٔ تخصیص ترافیک پویا (DTA) را مطرح کرده‌اند. پس از کار اولیه آن‌ها، مطالعات فراوانی توسط محققان برای مدل‌سازی و حل این مسئله انجام گرفته و در حال حاضر نیز مدل‌هایی که بتوانند مسائل با مقیاس بزرگ و واقعی را حل کنند بسیار مورد توجه قرار گرفته است. مسئلهٔ تخصیص ترافیک پویا شامل دو بخش اصلی مدل‌سازی انتخاب سفر و مدل‌سازی جریان ترافیک می‌باشد. در بخش اول نحوهٔ انتخاب مسیر و زمان شروع حرکت رانندگان تعیین می‌شود و مقدار جریان در هر یک از مسیرهای یک زوج مبدأ مقصد در هر زمان پیش‌بینی می‌گردد. در بخش دوم با معلوم بودن جریان در مسیرها، میزان جریان در هر یک از کمان‌های شبکه تعیین می‌شود و بر اساس آن سطح عملکرد شبکه پیش‌بینی می‌گردد. خروجی بخش انتخاب سفر، ورودی بخش جریان ترافیک و خروجی بخش جریان ترافیک، ورودی بخش

انتخاب سفر می‌باشد. مسائل تخصیص ترافیک پویا را می‌توان از جنبه‌های مختلفی دسته‌بندی کرد که این دسته‌بندی‌ها بر اساس خصوصیات مدل‌های انتخاب سفر و جریان ترافیک می‌باشند. مسئلهٔ تخصیص ترافیک پویا را می‌توان بر اساس نحوهٔ انتخاب سفر رانندگان تقسیم‌بندی کرد، در این حالت فرضیات متنوعی برای نحوهٔ انتخاب مسیر و زمان عزیمت (شروع حرکت) مسافران در نظر گرفته می‌شود. این دسته‌بندی به‌طورکلی شامل دو نوع مسئلهٔ بهینهٔ سیستم پویا (DSO) و مسئلهٔ تعادل استفاده‌کننده پویا (DUE) می‌باشد که معمولاً بر پایهٔ یک نسخه پویا از اصول واردراپ ((Wardrop, JG. (1952)) بنا نهاده می‌شوند. اما معمول‌ترین روش برای طبقه‌بندی مسائل DTA، دسته‌بندی آن‌ها بر اساس رویکردهای مختلف مدل‌سازی مسئله می‌باشد. در این حالت دو رویکرد کلی وجود دارد که عبارت‌اند از مدل‌سازی تحلیلی و مدل‌سازی بر پایهٔ شبیه‌سازی، مدل‌های تحلیلی سعی بر آن دارند که مسئلهٔ تخصیص ترافیک پویا را بر اساس یک مدل ریاضی بازنویسی کنند. این نوع مدل‌ها معمولاً خصوصیات کلان‌نگر جریان ترافیک را درنظر می‌گیرند و تعریف درست و کاملی از شرایط بهینگی، یکتایی جواب و وجود تعادل ارایه می‌دهند. این مدل‌ها بر روی بخش انتخاب سفر مسئلهٔ DTA تأکید بیشتری دارند و معمولاً به طور کامل به اصول واردراپ پایبند هستند. در این مدل‌ها رسیدن به ویژگی‌های واقعی و پویای جریان ترافیک در اولویت بعدی قرار دارند و در اغلب مواقع با فرضیات ساده کننده‌ای، این ویژگی‌ها قربانی رسیدن به شرایط بهینگی و یکتایی جواب می‌شوند. مدل‌های بر پایهٔ شبیه‌سازی بر روی خصوصیات ریزنگر جریان ترافیک مثل روش‌های تعویض باند حرکت و نحوهٔ تشکیل و پس‌زدگی صف‌ها تأکید دارند. درواقع این مدل‌ها بر روی بخش جریان ترافیک DTA تمرکز داشته و اصول انتخاب سفر در اولویت بعدی آن‌ها قرار دارند. در این مدل‌ها تضمین وجود شرایط بهینگی و یکتایی جواب و رسیدن به تعادل قطعی دشوار می‌باشد. در مدل‌های بر پایه شبیه‌سازی از یک شبیه‌ساز ترافیکی برای توزیع جریان در شبکه استفاده می‌شود، درحالی‌که مدل‌های تحلیلی از یک مدل بارگذاری پویای کلان‌نگر جریان در شبکه (DNL) برای پخش جریان ترافیک بهره می‌برند.

۲- پیشینهٔ تحقیق

برای دسته‌بندی رویکردهای مدل‌سازی و روش‌های حل مسئلهٔ تخصیص ترافیک پویا می‌توان به مطالعات متعددی رجوع کرد. چیو و همکاران ((Chiu YC., et all (2011)) یک آغازگر در مدل‌سازی DTA مبتنی بر شبیه‌سازی ارایه کرده‌اند. گاراوللو و همکاران ((Garavello M. (2016)) بر روی مدل‌سازی جریان ترافیک DTA، یعنی مدل‌های هیدرودینامیکی، برای عبور و مرور وسایل نقلیه و گسترش شبکهٔ آن‌ها تمرکز داشته‌اند. وانگ و همکاران (Wang Y., et all (2018)) نیز مروری بر ادبیات مرتبط با DTA در حوزه محیط‌زیست دارند. پیتا و زیلی اسکوپولوس (Peeta, Ziliaskopoulos AK., (2001)) مرور جامعی بر روی مسئلهٔ تخصیص ترافیک پویا انجام داده‌اند. آن‌ها این مسئله را به دو دستهٔ تحلیلی و بر پایه شبیه‌سازی تقسیم کرده‌اند و در مورد مشکلات و نقاط قوت هر یک بحث کرده‌اند. در انتهای مقالهٔ آن‌ها، به مسائل و چالش‌های پیش روی محققان برای حل DTA اشاره شده و پیشنهادهایی برای تحقیقات آینده ارایه شده است. در تحقیق دیگری، زتو و وونگ ((Szeto W.Y., Wong S.C., (2012)) از جنبه‌های مختلفی به طبقه‌بندی مسائل DTA پرداخته‌اند و تمرکز ویژه‌ای بر روی دسته‌بندی اصول انتخاب سفر داشته‌اند. کاچرو و شلایان ((Kachroo, P., Shlayan N., (2013)) نیز مرور مفصلی بر روی مدل‌های تخصیص ترافیک از منظر مدل‌های ریاضیاتی به‌کاررفته در آن‌ها دارند. در این پژوهش باتوجه‌به دید کلان‌نگر، وجود تعریف درست و کامل از شرایط بهینگی، یکتایی جواب و وجود تعادل در مدل‌های تحلیلی، این رویکرد به‌عنوان رویکرد پایه، در نظر گرفته شده و برای نزدیک‌تر شدن به شرایط واقعی شبکه، روابط صف نیز به آن اعمال می‌گردد. در رویکرد تحلیلی، تخصیص ترافیک پویا را می‌توان بر اساس اصل اول واردراپ به فرم

مدل تعادل کاربر پویا (DUE) مدل کرد.

در این نوع مدل‌ها هزینهٔ سفر تجربه شده شامل زمان سفر و جریمه‌های رسیدن زودهنگام/دیرهنگام، برای آن دسته از مسیرها و زمان‌های عزیمت که توسط مسافران، بین یک جفت O-D مشخص انتخاب می‌شوند، یکسان است. مدل‌های DUE دو جنبهٔ رفتار سفر "انتخاب زمان عزیمت" و "انتخاب مسیر" را به‌خوبی در نظر می‌گیرند. براین‌اساس مدل‌های DUE به دو دسته:

۱- DUE با انتخاب مسیر (RC): از تحقیقات انجام‌گرفته در این زمینه می‌توان به کارهای لانگ و همکاران (Long et al. (2013))، بلیمر و بوی ((Bliemer and Bovy (2003)) و واریا و دینگرا (Varia and Dhingra 2004) اشاره کرد.

۲- DUE با انتخاب هم‌زمان مسیر و زمان عزیمت (SRDT): از پژوهش‌های صورت‌گرفته در این زمینه نیز می‌توان به کارهای فریش و همکاران (Friesz et al. (2013), (2011))، هان و همکاران (Han et al. (2013), (2015)) و سزتو و لو ((Szeto and Lo (2004)) اشاره کرد.

دو مؤلفهٔ اساسی در مفاهیم مدل‌های تحلیلی DUE وجود دارد.

۱- بیان ریاضی شرط تعادل.

۲- مدل عملکرد شبکه که اغلب به‌عنوان بارگذاری شبکهٔ پویا (DNL) نامیده می‌شود.

زیرمسئلهٔ DNL با بیان پویایی کمان؛ فعل‌وانفعالات محل اتصال؛ انتشار جریان؛ تأخیر کمان و تأخیر مسیر، رابطهٔ بین جریان‌های پویای ترافیک و تأخیرهای سفر را در نظر می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای بیان مفهوم تعادل پویا وجود دارد، از جمله:

۱- نامساوی متغیر

۲- مسائل مکمل غیرخطی

۳- نامساوی متغیر دیفرانسیلی

٤- سیستم‌های مکمل دیفرانسیلی

۵- مسائل نقطه ثابت

که در این پژوهش از الگوریتم نقطه ثابت برای بیان و حل مسائل تعادل کاربر پویا استفاده شده است.

۳- روش تحقیق

۳-۱- فرمول‌بندی تعادل کاربر پویا

چند نشان‌گذاری و اصطلاح بکار رفته در متن.

P : مجموعه‌ای از مسیرها در شبکه.

W : مجموعه‌ای از جفت O-D های در شبکه.

Q_{ij} : تقاضای O-D بین $(i,j) \in \mathcal{W}$.

P_{ij} : زیرمجموعه‌ی مسیرهایی که جفت O-D (i,j) را به هم متصل می‌کنند.

t : پارامتر زمان در افق زمانی ثابت $[t_0,\ t_f]$.

$h_p(t)$: نرخ عزیمت در طول مسیر p در زمان t.

$h\ (t)$: بردار کامل نرخ عزیمت $h(t) = \left(h_p(t) : p \in P\right)$.

$\psi_p(t,h)$: هزینهٔ سفر در طول مسیر p با زمان عزیمت t، تحت نرخ عزیمت h .

$v_{ij}(h)$: حداقل هزینهٔ سفر بین جفت O-D (i,j) برای همهٔ مسیرها و زمان‌های عزیمت.

با درنظرگرفتن این شرط که نرخ عزیمت مسیر به‌صورت مربع انتگرال‌پذیر زیر بیان شود:

$$h_p(\cdot) \in L_+^2[t_0,\ t_f]$$
$$h(\cdot) \in \left(L_+^2[t_0,\ t_f]\right)^{|\mathcal{P}|}$$

عملگر تأخیر مؤثر به‌صورت رابطهٔ ۱ تعریف می‌گردد.

در اینجا، اصطلاح "تأخیر مؤثر" یک مفهوم کلی از هزینهٔ سفر است که ممکن است نه‌تنها شامل یک ترکیب خطی از زمان سفر و مجازات ورود باشد، بلکه سایر اشکال دیگر، مانند قیمت‌گذاری جاده را نیز شامل شود. وجود عملگر تأخیر مؤثر در مدل DUE ضروری می‌باشد زیرا فیزیک شبکهٔ ترافیک را با درنظرگرفتن پویایی جریان‌های ترافیکی در سطح کمان، تقاطع، مسیر و سطوح شبکه در خود جای‌داده است. قید پایستگی تقاضای سفر به‌صورت رابطهٔ ۲ بیان می‌شود؛ بنابراین، مجموعهٔ بردار عزیمت مسیر عملی را می‌توان به‌صورت رابطهٔ ۳ بیان کرد. تعریف (SRDT

DUE): بردار عزیمت h^* یک تعادل کاربر پویا با انتخاب هم‌زمان مسیر و زمان عزیمت (SRDT) است اگر رابطه‌ی ٤ قرار باشد.

(۱)

$$\Psi : \left(L^2_+[t_0,\ t_f]\right)^{|\mathcal{P}|} \longrightarrow \left(L^2_+[t_0,\ t_f]\right)^{|\mathcal{P}|}$$

$$h(\cdot) = \{h_p(\cdot), p \in \mathcal{P}\} \longrightarrow \Psi(h) = \left\{\Psi_p(\cdot, h), p \in \mathcal{P}\right\} \quad (۲)$$

$$\textstyle\sum_{p\in\mathcal{P}_{ij}} \int_{t_0}^{t_f} h_p(t)dt = Q_{ij} \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{W}$$

$$\Lambda = \left\{h \geq 0 : \textstyle\sum_{p\in\mathcal{P}_{ij}} \int_{t_0}^{t_f} h_p(t)dt = Q_{ij} \ \ \forall (i,j) \in \mathcal{W}\right\} \subset \left(L^2_+[t_0,\ t_f]\right)^{|\mathcal{P}|} \quad (۳)$$

$$h_p^*(t) > 0, p \in \mathcal{P}_{ij} \implies \Psi_p(t, h^*) = \upsilon_{ij}(h^*) \quad t \in [t_0,\ t_f] \quad (٤)$$

۳-۲- بارگیری پویا شبکه

یک جز انتگرالی فرمول‌بندی DUE، عملگر تأخیر مؤثر Ψ می‌باشد که با استفاده از روش بارگذاری شبکهٔ پویا (DNL) ساخته می‌شود.

مدل کمان LWR

مدل LWR قادر به توصیف فیزیک امواج حرکتی (به‌عنوان مثال امواج شوک) است و قابلیت توسعهٔ شبکه را با درنظرگرفتن تشکیل و انتشار صف‌های وسیله نقلیه و همچنین پس‌زدگی جریان می‌دهد. این تغییر مکانی و زمانی تراکم وسیله نقلیه $\rho(t, x)$ در یک کمان مسیر با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل جزئی ۵ توصیف می‌گردد. که در آن کمان موردنظر به‌صورت یک فاصله‌ی مکانی، نشان داده می‌شود $[a, b]$. نمودار اساسی $f(\cdot)$ تابعی پیوسته و مقعر از چگالی ρ است. و در رابطه‌ی $f(0) = f(\rho^{\text{jam}}) = 0$ صدق می‌کند. به‌طوری‌که ρ^{jam} چگالی حداکثری را نشان می‌دهد. علاوه بر این، یک مقدار چگالی بحرانی منحصربه‌فرد ρ^c وجود دارد که در آن $f(\cdot)$ به حداکثر مقدار خود $f(\rho^c) = C$ می‌رسد، به‌طوری‌که C نشان‌دهنده‌ی ظرفیت جریان کمان می‌باشد.

چند شکل کاملاً پذیرفته‌شده $f(\cdot)$ شامل نمودارهای گرینشیلدز، ذوزنقه‌ای و مثلثی وجود دارد.

در این پژوهش نمودار اساسی مثلثی ٦ در نظر گرفته شده است. که $\upsilon > ۰$ و $\omega > ۰$ به ترتیب سرعت موج حرکتی روبه‌جلو و عقب را نشان می‌دهند. درحالی‌که دستگاه ٦ پویایی درون‌کمانی را به تصویر می‌کشد، انتشار تراکم بین کمانی نیاز به یک رویکرد دقیق از پویایی محل اتصال دارد که با مفاهیم تقاضا و عرضهٔ کمان پشتیبانی می‌شود.

تقاضا و عرضهٔ کمان

با درنظرگرفتن یک گره با m کمال ورودی و n کمان خروجی، پویایی در هر یک از m + n کمان توسط مدل LWR ٦ بیان می‌گردد. به طور قابل‌درکی این m + n معادله از طریق شرایط مرزی مرتبط با خود جفت می‌شوند. به‌خصوص، قید پایستگی جریان به‌صورت رابطهٔ ۷ لحاظ می‌گردد. به‌طوری‌که در آن اندیس i یا j نشان‌دهندهٔ کمان i یا j می‌باشد. معادلهٔ ۷ به معنای پایستگی کل جریان کلی گره‌ها است. بااین‌حال، این شرط به‌تنهایی مشخصات جریان منحصربه‌فردی را در این m+n کمان تضمین نمی‌کند و لازم است شرایط اضافی اعمال شود (Garavello et al. (2016)). برای این منظور، تقاضا و عرضهٔ کمان بیان می‌گردد، جایی که تقاضا (عرضه) به‌عنوان تابعی از تراکم نزدیک به خروجی (ورودی) کمان در نظر گرفته می‌شود که در رابطهٔ ۸ و ۹ بیان شده است.

$$\partial_t \rho(t,x) + \partial_x f\big(\rho(t,x)\big) = 0 \quad x \in [a,b],\ \ t \in [t_o, t_f] \quad (۵)$$

$$f(\rho) = \begin{cases} \upsilon\rho & \rho \in [0, \rho^c] \\ -\omega(\rho - \rho^{\text{jam}}) & \rho \in (\rho^c, \rho^{\text{jam}}] \end{cases} \quad (٦)$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} f_i\big(\rho_i(t,b_i)\big) = \sum_{j=1}^{n} f_i\big(\rho_i(t,a_i)\big) \ \ \forall t \in [t_o, t_f] \quad (۷)$$

$$D\big(\rho(t,b-)\big) = \begin{cases} f\big(\rho(t,b-)\big) & \text{اگر} \quad \rho(t,b-) < \rho^c \\ C & \text{اگر} \quad \rho(t,b-) \geq \rho^c \end{cases} \tag{۸}$$

$$S\big(\rho(t,a+)\big) = \begin{cases} C & \text{اگر} \quad \rho(t,a+) < \rho^c \\ f\big(\rho(t,a+)\big) & \text{اگر} \quad \rho(t,a+) \geq \rho^c \end{cases} \tag{۹}$$

رابطهٔ ۱۰ برای $j \in \{1,\dots,n\}$ ،$i \in \{1,\dots,m\}$ به‌صورت مستقیم، تقاضا (عرضه) حداکثر جریان را نشان می‌دهد که می‌تواند از کمان خارج شود (وارد شود). به این صورت که رابطه‌ی ۱۰ مشابه معادله‌ی ۷، از اعتبار فیزیکی جریان‌های عبوری از محل اتصال اطمینان حاصل می‌کند. با این‌وجود، هنوز شرایط اضافی برای جدا کردن مشخصات جریان منحصربه‌فرد در محل اتصال موردنیاز است. این شرایط اغلب بر اساس رفتار رانندگان یا اقدامات مدیریت ترافیک، مانند توزیع جریان، حق تقدم و کنترل سیگنال ترافیک حاصل می‌شود.

نمایش متغیر پویایی جریان

نمایش جواب متغیر معادلات همیلتون - جاکوبی به طور گسترده‌ای در مدل ترافیک LWR استفاده شده است. در این پژوهش تابع مسکوویتز، در نظر گرفته شده است که در آن $N(t,x)$، تعداد تجمعی وسایل نقلیه‌ای است که از مکان x در طول کمان، در زمان t عبور می‌کنند. پارامتر $N(t,x)$ در رابطه‌ی ۱۱ بیان شده است. که در معادله‌ی هامیلتون- جاکوبی ۱۲ نیز به‌خوبی صدق می‌کند.

با درنظرگرفتن $f^{\text{in}}(\text{t})$ و $f^{\text{out}}(\text{t})$ به‌عنوان جریان ورودی و خروجی کمان، مجموع تعداد وسایل نقلیه‌ی ورودی و خروجی کمان به‌صورت روابط ۱۳ و ١٤ تعریف می‌شود. که در آن‌ها بالانویس‌های "up" و "dn" به ترتیب مرزهای بالادست و پایین‌دست کمان را نشان می‌دهند. بر اساس روابط بیان شده و فرمولی به نام فرمول لاکس-هاپ (Claudel and Bayen (2010))، فرمول صریحی برای تقاضا و عرضه‌ی کمان به دست می‌آید که در روابط ۱۵ و ١٦ شرح داده شده است. در رابطه‌ی ۱۵ و ١٦، L = b - a نشان‌دهنده‌ی طول کمان می‌باشد. توجه داشته باشید که معادلات ۱۵ و ١٦ تقاضا و عرضه‌ی کمان را که ورودی‌های مدل اتصال هستند، به‌صورت $N^{up}(\cdot)$ ،$N^{dn}(\cdot)$ ،$f^{in}(\cdot)$ و $f^{out}(\cdot)$ بیان می‌کنند. این بدان معناست که دیگر نیازی به محاسبه‌ی پویایی در کمان نیست، بلکه در عوض باید بر روی جریان‌ها یا تعداد تجمعی در دو مرز کمان تمرکز شود. این امر پویایی کمان را بسیار ساده کرده و فرمول‌بندی مبتنی بر کمان یا در شکل مجزا آن، مدل انتقال کمان را ایجاد می‌کند.

$$f_i\big(\rho_i(t,b_i)\big) \leq D_i\big(\rho_i(t,b_i-)\big),\;\; f_j\left(\rho_j(t,a_j)\right) \leq S_j\left(\rho_j(t,a_j+)\right) \tag{۱۰}$$

$$\partial_t N(t,x) = f\big(\rho(t,x)\big), \quad \partial_x N(t,x) = -\rho(t,x) \quad x \in [a,b] \tag{۱۱}$$

$$\partial_t N(t,x) - f\big(-\partial_x N(t,x)\big) = 0,\;\; x \in [a,b] \quad t \in \left[t_o,t_f\right] \tag{۱۲}$$

$$N^{up}(t) = \int_{t_0}^{t_f} f^{in}(s)ds \tag{۱۳}$$

$$N^{dn}(t) = \int_{t_0}^{t_f} f^{out}(s)ds \tag{١٤}$$

$$D(t) = \begin{cases} f^{in}\left(t-\frac{L}{v}\right) & \text{اگر} \quad N^{up}\left(t-\frac{L}{v}\right) = N^{dn}(t) \\ C & \text{اگر} \quad N^{up}\left(t-\frac{L}{v}\right) > N^{dn}(t) \end{cases} \tag{۱۵}$$

$$S(t) = \begin{cases} f^{out}\left(t-\frac{L}{\omega}\right) & \text{اگر} \;\; N^{up}(t) = N^{dn}\left(t-\frac{L}{\omega}\right) + \rho^{jam}L \\ C & \text{اگر} \;\; N^{up}(t) < N^{dn}\left(t-\frac{L}{\omega}\right) + \rho^{jam}L \end{cases} \tag{١٦}$$

پویایی گره که شامل اطلاعات مسیر می‌شود.

پویایی گره برای توسعهٔ شبکهٔ مدل LWR ضروری می‌باشد. برخلاف بسیاری از مدل‌های گره موجود مانند آنچه در بخش قبل بررسی‌شده است، در یک فرمول DNL مبتنی بر مسیر، باید اطلاعات مسیریابی ایجادشده در مدل محل اتصال وارد شود. چنین اطلاعاتی در یک ماتریس توزیع جریان درون‌زا آشکار می‌گردد و نسبت جریان خروجی از

یک کمان ورودی خاص را مشخص می‌کند که به یک کمان خروجی معین پیش می‌رود. در این تحقیق تابع زمان ورود به کمان با $\tau(t)$ که t زمان خروج مربوطه می‌باشد، تعریف می‌شود. با ارزیابی اختلاف افقی منحنی‌های تجمعی $N^{up}(\cdot)$ و $N^{dn}(\cdot)$می‌توان چنین تابعی را به دست آورد (Friesz et al. (2013)). برای کمان i و مسیر p به‌گونه‌ای که $i \in p$، $\mu_i^p(\mathrm{t},\mathrm{x})$ به‌صورت درصد جریان روی کمان i در هر نقطه (x ،t) که به مسیر p تعلق دارد، تعریف می‌شود. در نتیجه اصل اولین ورودی اولین خروجی فرم زیر بیان می‌گردد.

$$\mu_i^p\left(\mathrm{t},b_i\right)=\mu_i^p\left(\tau(t),a_i\right) \quad (۱۷)$$

با درنظرگرفتن گرهٔ J با اندیس کمان‌های ورودی i به‌طوری‌که $i \in \{1,\ldots,m\}$ و کمان‌های خروجی j به‌طوری‌که $j \in \{1,\ldots,n\}$. ماتریس توزیع $A^J(t)$ می‌تواند به‌صورت رابطه‌ی ۱۸ بیان شود. اسکالر $\alpha_{ij}(t)$ بیانگر نسبت ترافیک موجود در کمان i است که به سمت کمان j پیشروی می‌کند. چندین گزینه برای مدل‌های گره وجود دارد که همه‌ی آن‌ها نیاز به برآورده ساختن قید پایستگی جریان ۷، قیدهای عرضه و تقاضای رابطه‌ی ۱۰ و بستگی به ماتریس توزیع جریان $A^J(t)$ دارند. این‌چنین مدلی را می‌توان به‌صورت مفهومی رابطه‌ی ۱۹ بیان کرد. که در آن $D_i(t)$، $S_j(t)$ و $A^J(t)$ به‌عنوان متغیرهای ورودی مدل گره در نظر گرفته می‌شود. خروجی که در سمت چپ رابطه‌ی ۱۹ نشان داده‌شده است، شامل جریان خروجی (ورودی) کمان‌های ورودی (خروجی) است.

پویایی در گره‌های مبدأ

وجود مدلی در گره‌های مبدأ (منبع) موردنیاز است زیرا جریان مسیر $h_p(\cdot)$ که توسط معادله‌ی ٤ تعریف شده است، از بالا محدود نشده است. در این حالت، یک مدل صف در گره‌ی مبدأ موردنیاز است تا جریان خروجی بیش از عرضه‌ی کمان پایین‌دستی مربوطه را در خود جا دهد.

در این پژوهش برای گرهٔ مبدأ o یک پویایی از نوع صف نقطه‌ای استفاده می‌شود. با درنظرگرفتن $q_o(t)$ به‌عنوان اندازه‌ی صف نقطه‌ای و کمان j به‌عنوان کمان متصل به گره‌ی مبدأ، رابطه‌ی ۲۰ حاصل می‌گردد. که در آن $\mathcal{P}^o$ مجموعه‌ای از مسیرهای نشأت گرفته از o می‌باشد. اولین عبارت در سمت راست معادله‌ی ۲۰ نشان‌دهنده‌ی جریان ورودی به‌صف است، و عبارت دوم نشان‌دهندهٔ جریان خروجی از صف می‌باشد، جایی که تقاضا در مبدأ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A^J(t)=\left\{\alpha_{ij}(t)\right\},\ \ \alpha_{ij}(t)=\sum_{i,j\in p}\mu_i^p\left(\mathrm{t},b_i\right)=\sum_{i,j\in p}\mu_i^p(\tau(t),a_i) \quad (۱۸)$$

$$\left(\left[f_i^{out}(t)\right]_{i=1,\ldots,m},\left[f_j^{in}(t)\right]_{j=1,\ldots,n}\right)=\Theta\left(\left[D_i(t)\right]_{i=1,\ldots,m},\left[S_j(t)\right]_{j=1,\ldots,n};\ A^J(t)\right) \quad (۱۹)$$

$$\frac{d}{dt}q_o(t)=\sum_{p\in\mathcal{P}^o}h_p(t)-\min\left\{D_o(t),S_j(t)\right\} \quad (۲۰)$$

$$D_o(t)=\begin{cases}\mathcal{M} & q_o(t)>0\\ \sum_{p\in\mathcal{P}^o}h_p(t) & q_o(t)=0\end{cases} \quad (۲۱)$$

و $\mathcal{M}$ یک عدد بزرگ است، به‌عنوان‌مثال بزرگ‌تر از ظرفیت جریان کمان j. در این پژوهش پویایی صف پیشنهادی با مدل صف کلاسیک متفاوت است. زیرا در مدل به‌کاررفته در این پژوهش ظرفیت خروج از صف متفاوت فرض می‌شود، به این صورت که به‌جای ظرفیت جریان ثابت، توسط عرضهٔ پایین‌دستی $S_j(t)$ محدود می‌گردد.

محاسبهٔ زمان سفر مسیر

روش DNL مدت‌زمان سفر مسیر را برای مجموعهٔ معینی از نرخ عزیمت مسیر محاسبه می‌کند. زمان سفر مسیر شامل زمان‌های سفر کمان‌ها بعلاوه زمان انتظار در مبدأ است. تابع زمان خروج از کمان $\lambda(t)$ با اندازه‌گیری اختلاف بین تعداد تجمعی ورودی و خروجی به‌صورت فرمول ۲۲ تعریف می‌شود.

(۲۲)

$$N^{up}(t) = N^{dn}(\lambda(t))$$

معادلهٔ ۲۲ برای محاسبهٔ تابع زمان خروج از صف در مبدأ باتوجه‌به پویایی ارائه‌شده در بخش قبل برای هر مسیر به‌صورت $p = \{۱ ، ۲ ، \dots ، K\}$ اعمال می‌شود، زمان خروج از مسیر برای یک زمان عزیمت مشخص t به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\lambda_0 \circ \lambda_1 \circ \lambda_2 \dots \circ \lambda_K(t)$$

(۲۳)

در رابطهٔ بالا $f \circ g\ (t) \doteq g(f(t))$ نشان‌دهنده‌ی ترکیب دو تابع می‌باشد و $\lambda_0(\cdot)$ تابع زمان خروج برای صف احتمالی در مبدأ o است.

سیستم فرمول‌بندی معادلات جبری دیفرانسیلی DNL

به‌عنوان خلاصه‌ای از بخش‌های ارائه‌شده تاکنون، سیستم کاملی از معادلات جبری دیفرانسیلی (DAE) را می‌توان ارایه کرد. لیست زیر علائم به‌کاررفته در سیستم معادلات مذکور می‌باشد.

$\mathcal{P}$: مجموعه‌ی همه‌ی مسیرها.

S : مجموعه‌ای از مبدأها.

$\mathcal{P}^o$: مجموعه‌ای از مسیرهایی که از o شروع می‌شود $o \in S$.

I^J : مجموعه‌ی کمان‌های ورودی به تقاطع J.

O^J : مجموعه‌ی کمان‌های خروجی از تقاطع J.

A^J : ماتریس توزیع جریان در تقاطع J.

$h_p(t)$: نرخ عزیمت در طول مسیر p، $p \in \mathcal{P}$.

$f_i^{in}(t)$: جریان ورودی کمان i.

$f_i^{out}(t)$: جریان خروجی کمان i.

$N_i^{up}(t)$: تعداد تجمعی وسایل نقلیه‌ی ورودی به کمان.

$N_i^{dn}(t)$: تعداد تجمعی وسایل نقلیه خروجی از کمان.

$D_i(t)$: تقاضای لینک i.

$S_i(t)$: عرضه‌ی لینک i.

$\mu_i^p(t,x)$: درصد جریان در کمان i که به مسیر p متعلق دارد.

$q_o(t)$: صف نقطه‌ای در گره مبدأ o، $o \in S$.

$\tau_i(t)$: زمان ورود به لینک i مربوط به زمان خروج t.

$\lambda_i(t)$: زمان خروج از لینک i مربوط به زمان ورود t.

باتوجه به تعاریف بالا سیستم معادلات DAE به‌صورت

$$\frac{d}{dt}q_o(t) = \sum_{p\in\mathcal{P}^o} h_p(t) - \min\{D_o(t), S_j(t)\}$$

$$D_o(t) = \begin{cases} \mathcal{M} & q_o(t) > 0 \\ \sum_{p\in\mathcal{P}^o} h_p(t) & q_o(t) = 0 \end{cases}$$

$$D_i(t) = \begin{cases} f_i^{\,in}\left(t-\frac{L_i}{v_i}\right) & \text{اگر} \quad N_i^{\,up}\left(t-\frac{L_i}{v_i}\right) = N_i^{\,dn}(t) \\ C_i & \text{اگر} \quad N_i^{\,up}\left(t-\frac{L_i}{v_i}\right) > N_i^{\,dn}(t) \end{cases}$$

$$S_j(t) = \begin{cases} f_j^{\,out}\left(t-\frac{L_j}{\omega_j}\right) & \text{اگر} \quad N_j^{\,up}(t) = N_j^{\,dn}\left(t-\frac{L_j}{\omega_j}\right) + \rho_j^{\,jam}L_j \\ C_j & \text{اگر} \quad N_j^{\,up}(t) < N_j^{\,dn}\left(t-\frac{L_j}{\omega_j}\right) + \rho_j^{\,jam}L_j \end{cases}$$

$$N_i^{\,dn}(t) = N_i^{\,up}(\tau_i(t)), \quad N_i^{\,up}(t) = N_i^{\,dn}(\lambda_i(t))$$

$$\mu_j^p\left(\mathrm{t}, a_i\right) = \frac{f_i^{\,out}(t)\mu_i^p(\tau_i(t), a_i)}{f_j^{\,in}(t)} \qquad \forall p\ s.t.\{i,j\}\subset p$$

$$A^J(t) = \{\alpha_{ij}(t)\}, \quad \alpha_{ij}(t) = \sum_{i,j\in p} \mu_i^p(\tau_i(t), a_i)$$

$$\left([f_i^{out}(t)]_{i=1,\dots,m}, [f_j^{in}(t)]_{j=1,\dots,n}\right) = \Theta\left([D_i(t)]_{i=1,\dots,m}, [S_j(t)]_{j=1,\dots,n}\ ;\ A^J(t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}N_i^{\,up}(t) = f_i^{\,in}(t), \quad \frac{d}{dt}N_i^{\,dn}(t) = f_i^{\,out}(t)$$

$$D_p(t,h) = \lambda_0\circ\lambda_1\circ\lambda_2\ldots\circ\lambda_K(t) - t \qquad p = \{1, 2, \ldots, K\}$$

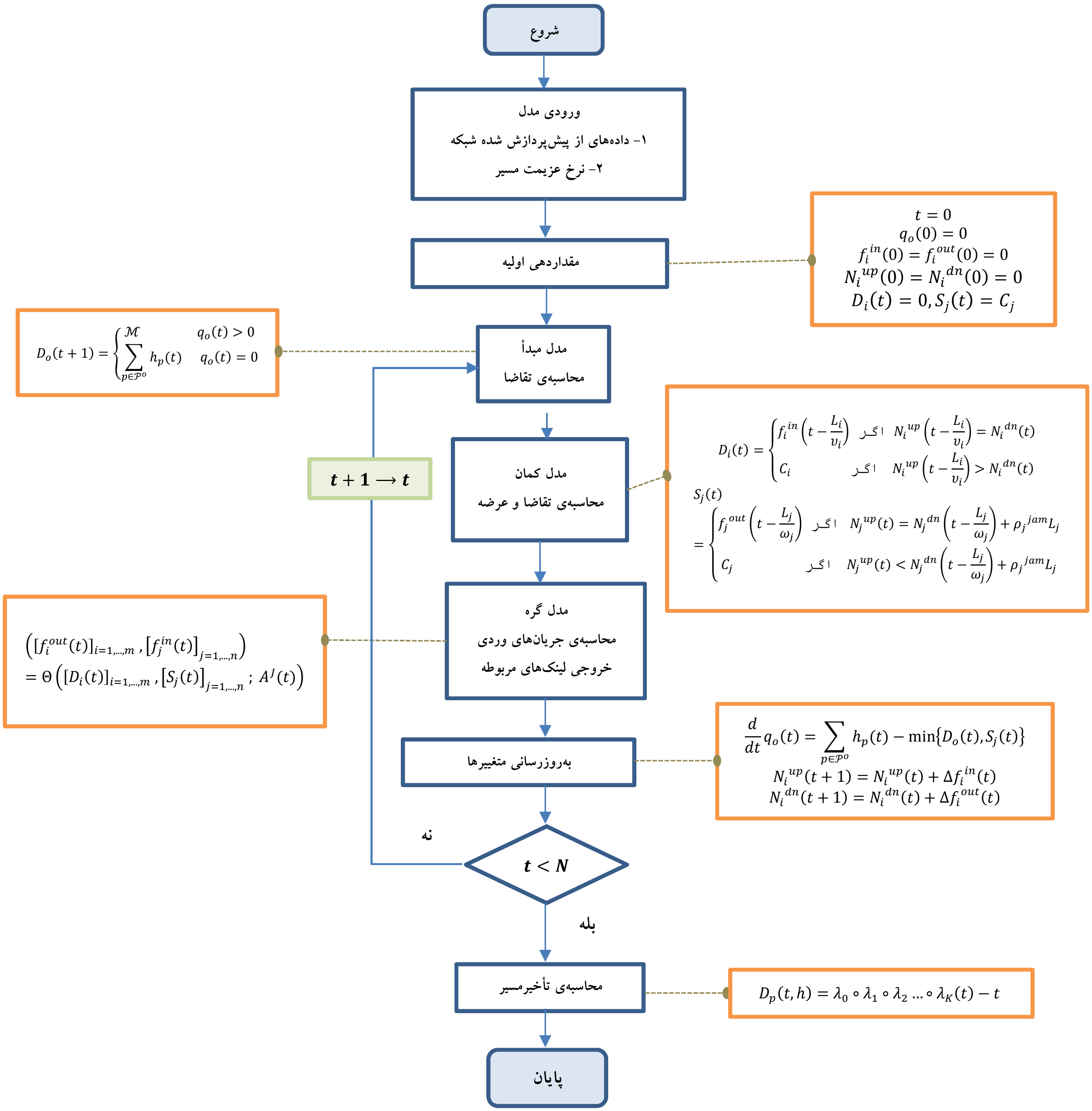
زیر بیان می‌گردد. معادلات بالا سیستم DAE را بر اساس DNL تشکیل می‌دهند. در مقایسه با سیستم معادلات جبری دیفرانسیل جزئی (PDAE) ارائه‌شده توسط هان و همکاران ((Han et al. (2016))، سیستم DAE همان‌طور که از معادلات LWR انتظار می‌رود و باتوجه‌به فرمول‌بندی متغیر، هیچ مشتق فضایی ندارد. سیستم پیشنهادی DAE ممکن است به‌صورت گسسته نیز بیان شود. فلوچارت شکل ۱ منطق گام‌به‌گام این سیستم را توضیح می‌دهد.

۳-۳- الگوریتم نقطه ثابت برای محاسبهٔ DUE

طبق مطالب محاسبهٔ DUE با فرمول‌بندی‌های ریاضی معادل مانند نابرابری متغیر، نابرابری متغیر دیفرانسیلی، مسئلهٔ نقطه ثابت و مسئلهٔ مکمل غیرخطی تسهیل می‌شود. در این پژوهش از الگوریتمی مبتنی بر فرمول نقطه ثابت برای حل مسئلهٔ DUE در یک فضای عملکردی استفاده می‌شود. با درنظرگرفتن $P_{\Lambda_0}[\cdot]$ به‌عنوان عملگر تصویر حداقل نرم در فضای $\left(L^2[t_0, t_f]\right)^{|\mathcal{P}|}$، مسئلهٔ DUE به‌صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$h^{\mathrm{k}+1} = P_{\Lambda_0}\left[h^{\mathrm{k}} - \alpha\Psi\left(h^{\mathrm{k}}\right)\right] \qquad (۲۳)$$

در رابطه‌ی بالا $\alpha > 0$ یک ثابت است که اندازه‌ی گام را نشان می‌دهد، $h^{\mathrm{k+1}}$ و h^{k} به ترتیب بیانگر بردار نرخ عزیمت مسیر در تکرارهای (k + 1) ام و k ام هستند. $\Psi\left(h^{\mathrm{k}}\right)$ بردار تأخیر مسیر مؤثر را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن تعریف Λ_0 از معادله‌ی ۳، سمت راست معادله‌ی ۲۳، که شامل عملگر تصویر است، به یک مسئلهٔ کنترل بهینه درجه‌دو خطی مرتبط می‌شود که متغیرها را می‌توان باتوجه‌به مطالب ذکرشده در بالا پیدا کرد.



شکل ۱. الگوریتم بارگذاری شبکهٔ پویا

مراحل اصلی الگوریتم نقطه ثابت به شرح زیر می‌باشد:

الگوریتم نقطه ثابت برای حل SRDT DUE

مرحله ۰. مقداردهی اولیه. ابتدا $k = 0$ قرار داده شده و یک بردار نرخ عزیمت اولیه $h^0 \in \Lambda$ در نظر گرفته می‌شود. سپس ثابت $a > 0$ برای استفاده در همه‌ی تکرارها تعیین می‌گردد.

مرحله ۱. بارگذاری شبکهٔ پویا. بارگیری شبکهٔ پویا با بردار نرخ عزیمت $h^k \in \Lambda$ انجام گرفته، تا تأخیرهای مسیر مؤثر $\Psi_p(t, h^k)$ برای همه‌ی $t \in [t_0, t_f]$ و $p \in \mathcal{P}$ محاسبه شود.

مرحله ۲. به‌روزرسانی نقطه ثابت. برای هر جفت مبدأ – مقصد $(i،j) \in \mathcal{W}$ معادله‌ی جبری ۲۴ برای متغیر v_{ij} حل می‌شود (جایی که $[x]_+ \doteq max\{0, x\}$ عدم منفی بودن را تضمین می‌کند).

سپس برای همهٔ $t \in [t_0, t_f]$ و $p \in \mathcal{P}_{ij}$ رابطه‌ی ۲۵ محاسبه می‌شود.

مرحله ۳. آزمون توقف. باتوجه‌به آستانهٔ ازپیش‌تعیین‌شده $\varepsilon > 0$، رابطه‌ی ۲۷ به دست می‌آید.

اگر این رابطه برقرار باشد الگوریتم متوقف شده و h^{k+1} به‌عنوان جواب الگوریتم DUE از الگوریتم خارج می‌شود. در غیر این صورت k برابر k+1 قرار داده شده و الگوریتم به مرحله ۱ باز خواهد گشت. در الگوریتم نقطه ثابت، مرحله‌ی مهم، یافتن متغیر v_{ij} در معادله‌ی ۲۴ می‌باشد. توجه داشته باشید که این به معنای یافتن مقدار x است به‌طوری‌که $F(x) = 0$، در جایی که رابطه‌ی ۲۷ برقرار باشد. این رابطه یک تابع پیوسته با یک پارامتر x می‌باشد. بنابراین، v_{ij} را می‌توان از طریق الگوریتم‌های استاندارد ریشه‌یابی یافت.

شکل ۲ فلوچارت فرایند گام‌به‌گام الگوریتم نقطه ثابت را نشان می‌دهد.

٤- مطالعهٔ موردی

در این تحقیق برای مطالعهٔ موردی از داده‌های منطقهٔ شهری شیکاگو در ایالت ایلینوی آمریکا استفاده شده است.

شکل ۳. شهر شیکاگو در ایالت ایلینوی آمریکا

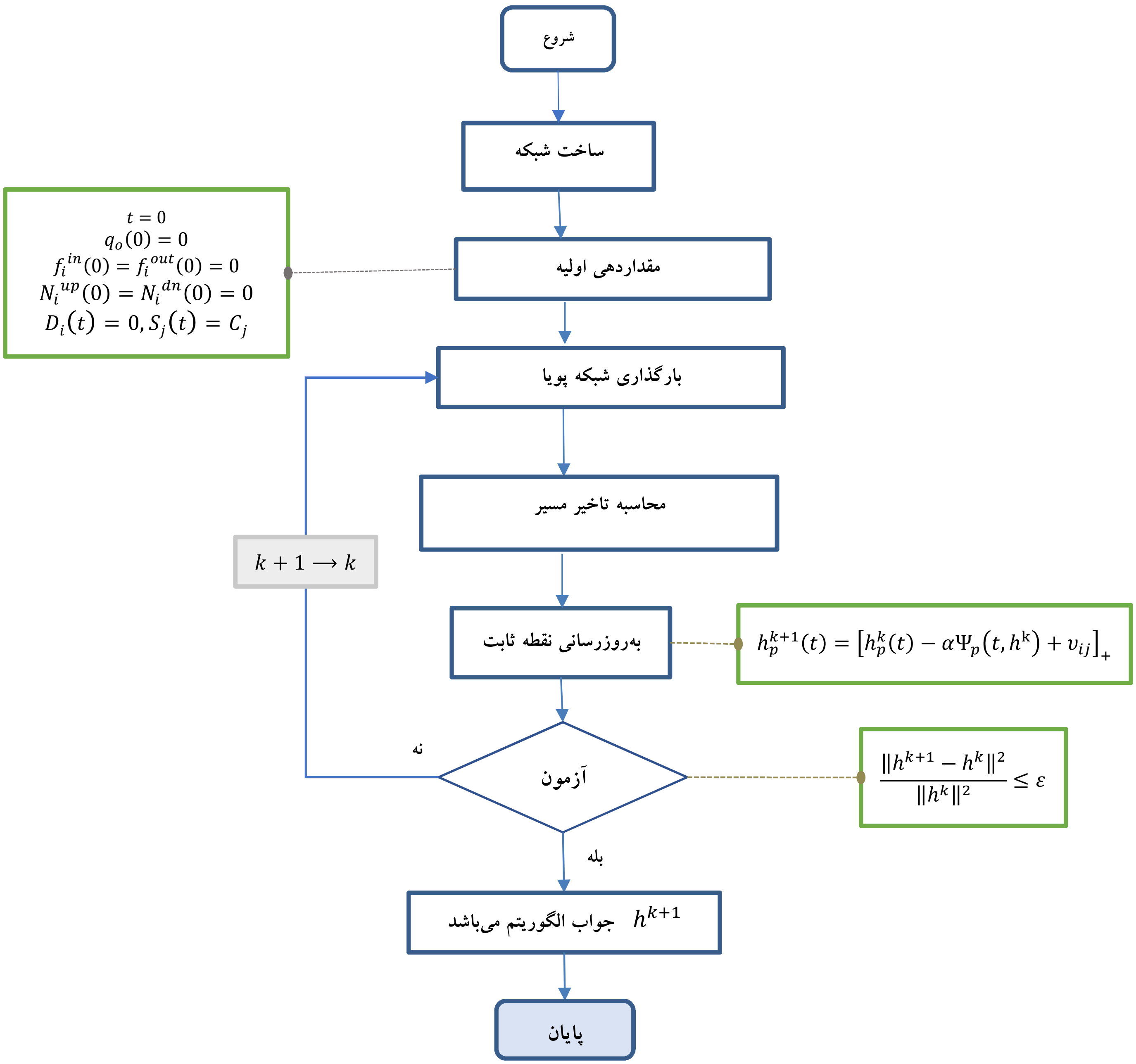
که اطلاعات شبکهٔ حمل‌ونقلی شهر مورد مطالعه به شرح جدول ۱ می‌باشد.

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_{ij}}\int_{t_0}^{t_f}\left[h_p^k(t)-\alpha\Psi_p(t,h^k)+v_{ij}\right]_+dt=Q_{ij} \quad (۲۴)$$

$$h_p^{k+1}(t)=\left[h_p^k(t)-\alpha\Psi_p(t,h^k)+v_{ij}\right]_+ \quad (۲۵)$$

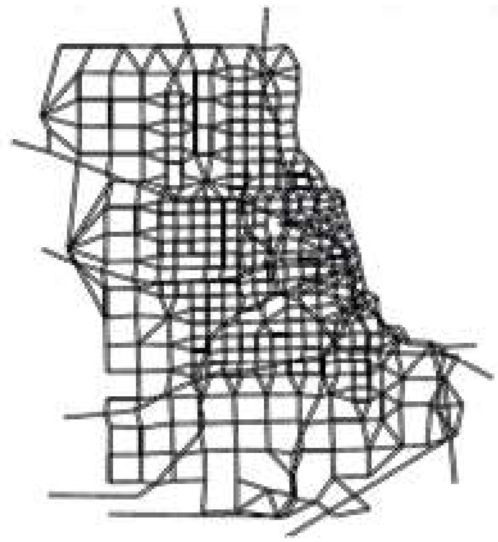
$$\frac{\|h^{k+1}-h^k\|^2}{\|h^k\|^2}\le\varepsilon \quad (۲۶)$$

$$F(x)\doteq\sum_{p\in\mathcal{P}_{ij}}\int_{t_0}^{t_f}\left[h_p^k(t)-\alpha\Psi_p\left(t,h^k\right)+v_{ij}\right]_+dt-Q_{ij} \quad (۲۷)$$



جدول ۱. مشخصات اصلی شبکهٔ مورد مطالعه

مسیر	تعداد OD	کمان	گره	زون
۲۵۰۰۰۰	۸۶۱۷۹	۲۹۵۰	۹۳۳	۳۸۷



شکل ٤. شبکهٔ شیکاگو

٤-۱- داده‌های ورودی برنامه

داده‌های ورودی شامل:

۱- OD_set: ماتریس ODهای شبکه.

۲- ODpath_set: ماتریس مسیرهای عبوری از هر OD.

۳- OD_demand: ماتریس تقاضای هر OD.

٤- T_A: ماتریس زمان رسیدن هدف هر جفت O-D - (i ,j).

۵- linkData: ماتریس اطلاعات کمان‌ها، شامل اندیس

در ادامه با استفاده از فایل ورودی linkData داده‌های گره‌های ابتدا و انتهای کمان‌ها، چگالی، طول، زمان جریان آزاد و تعداد کمان‌ها استخراج شده و در متغیرهایی تحت همان نام‌ها ذخیره می‌گردد. سپس با استفاده از فایل pathList ماتریس مسیرها بر اساس توالی کمان‌هایشان ذخیره شده و بر اساس آن تعداد کمان‌های هر مسیر حاصل می‌شود. گره‌های ابتدا و انتهای هر مسیر مشخص و در متغیرهایی ذخیره می‌گردد. بر اساس ماتریس‌های ابتدا و انتهای مسیرها و

گره‌های ابتدا و انتها هر کمان، چگالی کمان، طول کمان و زمان ترددآزاد (و در صورت وجود هزینهٔ عبور از کمان).

٦-pathList: ماتریس مسیرها که شامل اندیس کمان‌های هر مسیر می‌باشد.

٤-۲- روند کدنویسی الگوریتم تخصیص

در این بخش روند الگوریتم تخصیص در قالب کدهای نوشته شده بیان می‌شود. برنامهٔ نوشته شده از ٤ بخش به شرح زیر تشکیل شده است.

٤-۲-۱- فایل create_network

در این فایل ابتدا مقادیر اولیه به طور مثال α، آستانهٔ تعیین شده برای الگوریتم و غیره ایجاد شده سپس فایل‌های دادهٔ موردنیاز فراخوانی می‌شود که شامل موارد زیر می‌باشد.

۱- ODpath_set

۲- OD_demand

۳- linkData

٤- pathList

یکه کردن آن‌ها ماتریس یکهٔ مبدأها و مقصدها تولید شده و بر اساس آن‌ها تعداد مبدأها و مقصدها به‌دست‌آمده و ذخیره می‌گردد. در ادامه به‌تمامی کمان‌ها، مبدأها، مقصدها و مسیرها اندیس منحصربه‌فردی داده می‌شود. سپس براساس متغیرهای ذخیره شده ماتریس کمان‌های ورودی و خروجی به هر گره، تعداد و اندیس آن‌ها تولید می‌شود. در انتها بر اساس متغیرهای بالا، ماتریس شبکه تولید می‌گردد که یک ماتریس ٤ بعدی است. ماتریس حاصله شامل تمامی گره‌ها و کمان‌های

ورودی و خروجی به آن‌ها و اندیس مسیر کمان ورودی یا خروجی هر گره می‌باشد.

۴-۲-۲- فایل DUE_solver

در فایل DUE_solver ابتدا مقادیر اولیهٔ موردنیاز برای الگوریتم تولید می‌شود به طور مثال بردار نرخ عزیمت اولیه سپس حلقه اصلی الگوریتم ایجاد می‌گردد که شامل گام‌های زیر می‌باشد.

۱- فراخوانی فایل DYNAMIC_NETWORK_LOADING با پارامترهای ورودی متغیرهای شبکه و بردار نرخ عزیمت اولیه. خروجی این فایل، تأخیر محاسبه شده می‌باشد (در مورد این فایل در ادامه بحث خواهد شده).

۲- فراخوانی فایل Update با پارامترهای ورودی ماتریس تأخیر محاسبه شده، ماتریس نرخ عزیمت و متغیرهای شبکه. خروجی این فایل نرخ عزیمت جدید به‌دست‌آمده و تأخیر مؤثر شبکه می‌باشد (در مورد این فایل نیز در ادامه بحث خواهد شد).

۳- آزمون توقف مطابق با فرمول ۲۶، بر اساس آستانهٔ تعریف شده در فایل create_network بررسی می‌شود. در صورت برقراری رابطهٔ ۲۶ فایل DUE_solver خاتمه یافته و مقادیر نرخ عزیمت و تأخیر مؤثر به‌دست‌آمده ذخیره می‌گردد. در غیر این صورت ماتریس نرخ عزیمت به‌دست‌آمده به‌عنوان مقدار ورودی به ابتدا حلقه برخواهد گشت.

۴-۲-۳- فایل DYNAMIC NETWORK LOADING

ورودی این فایل شامل ماتریس نرخ عزیمت و متغیرهای شبکه می‌باشد. در ابتدا داده‌های شبکه به فرم مناسب خود درآمده (به طور مثال زمان جریان آزاد که به فرم عدد اعشاری می‌باشد به فرم صحیح خود تبدیل می‌شود) سپس ظرفیت کمان بر اساس مقادیر چگالی و زمان جریان آزاد، به تعداد وسیله نقلیه تغییر می‌یابد. مقادیر چگالی حالت ازدحام و متغیرهای موج جلو رونده و بازگشتی بر اساس متغیرهای نام‌برده تعیین می‌گردد. در ادامه متغیرهای جریان بالادستی و پایین‌دستی، نرخ ورود و خروج و همچنین ماتریس کمان مسیر تعریف می‌شود (که در ادامه مقادیر آن‌ها محاسبه می‌گردد). سپس بر اساس الگوریتم بارگذاری شبکهٔ بیان شده در شکل ۱ شبکه هر ۱۸۰ ثانیه (۳ دقیقه) بارگذاری شده که به‌طورکلی شامل مدل کمان و مدل گره می‌باشد. در انتها ماتریس زمان سفر مسیرها بر اساس جریان‌های بالادستی و پایین‌دستی حاصل از بارگذاری شبکهٔ انجام شده، به دست می‌آید. ماتریس زمان سفر مسیرها تحت نام delay ذخیره شده و از فایل خارج می‌گردد.

۴-۲-۴- فایل Update

ورودی‌های این فایل شامل ماتریس تأخیر، نرخ عزیمت و متغیرهای شبکه می‌باشد. ابتدا متغیرها به فرم مناسب تبدیل شده. سپس متغیر متناظر با مفهوم زود رسیدن، برابر ۰٫۸ و متغیر متناظر با مفهوم دیر رسیدن، برابر ۱٫۲ قرار داده می‌شود. در ادامه ماتریس زمان رسیدن هدف هر جفت O-D از ماتریس تأخیر کم شده سپس مقادیر مثبت آن در ۱٫۲ و مقادیر منفی آن در ۰٫۸ ضرب می‌گردد. ماتریس حاصله، با ماتریس تأخیر جمع شده و ماتریس به‌دست‌آمده در رابطهٔ ۲۴ قرار داده می‌شود. در ادامه با استفاده از الگوریتم ریشه‌یاب اتخاذ شده در برنامه، مقدار متغیر v_{ij} حاصل می‌گردد. مقدار متغیر v_{ij} محاسبه شده در رابطه‌ی ۲۵ قرار گرفته و مقدار نرخ عزیمت جدید به دست می‌آید. مقدار نرخ عزیمت جدید به همراه تأخیر مؤثر به‌دست‌آمده در این فایل ذخیره می‌گردد.

۴-۳- نتایج حاصل از تخصیص

۴-۳-۱- عملکرد الگوریتم نقطه ثابت

باتوجه‌به داده‌های فوق‌الذکر و فرایند تخصیص توضیح داده شده همچنین درنظرگرفتن ۱۰۰ تکرار

به‌عنوان حداکثر تعداد تکرار الگوریتم و آستانهٔ 10^{-3}، پس از طی فرایند تخصیص، نتایج زیر حاصل می‌گردد. شکل ۵ شکاف‌های نسبی، یعنی سمت چپ معادلهٔ ۲۶، برای مجموع ۶۹ تکرار الگوریتم نقطه ثابت در شبکه را نشان می‌دهد که از فایل خروجی با نام epsilon حاصل شده است.

٤-۳-۲- جواب‌های الگوریتم نقطه ثابت

در این بخش جواب‌های DUE حاصل از همگرایی الگوریتم نقطه ثابت مورد بررسی قرار خواهد گرفت. شکل‌های ٦، ۷ و ۸ نرخ عزیمت مسیر و همچنین تأخیرهای مسیر مؤثر مرتبط با ۳ کمان دلخواه را نشان می‌دهد که از فایل‌های خروجی با نام‌های h_final و Eff_delay ساخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نرخ عزیمت تنها درصورتی‌که تأخیرهای مؤثر مربوطه برابر و حداقل باشد، مقادیر غیر صفر به خود می‌گیرد که با مفهوم DUE مطابقت دارد. برای ارزیابی دقیق کیفیت جواب‌های DUE، تابع شکاف بین هر جفت O-D $(i,j)\in\mathcal{W}$ به صورت رابطه‌ی ۲۸ تعریف می‌گردد. در رابطهٔ ۲۸، GAP_{ij} نشان‌دهنده‌ی طیف هزینه‌های سفر است که توسط مسافران در جفت O-D (i,j) تجربه می‌شود. در حالت ایده‌آل DUE، شکاف‌ها باید برای همه‌ی جفت‌های O-D برابر با صفر باشد. شکل ۹ خلاصهٔ همهٔ شکاف‌های O-D جواب‌های DUE در شبکهٔ مورد بررسی را نشان می‌دهد که از فایل خروجی با نام OD_gap حاصل شده است. همان‌طور که دیده می‌شود اکثر شکاف‌های O-D در شبکه، در محدوده‌ای بین ۰ تا ۰/۰۵ ساعت است که نشان‌دهندهٔ کیفیت خروجی‌ها می‌باشد.

٤-۳-۳- فایل‌های خروجی تخصیص

فایل‌های خروجی حاصل از تخصیص به‌صورت زیر می‌باشد.

۱- h_final.txt: بردار جریان مسیر هنگام همگرایی یا خاتمهٔ اجباری الگوریتم نقطه ثابت.

۲- Eff_delay.txt: بردار تأخیر مسیر مؤثر که ابعاد آن با ابعاد "h final.txt" مطابقت دارد.

۳- epsilon.txt: فاصلهٔ نسبی بین دو تکرار متوالی الگوریتم نقطه ثابت.

٤- iter_needed.txt: تعداد تکرارهای انجام شده با خاتمهٔ الگوریتم (در صورت برآورده شدن معیار همگرایی یا رسیدن به حداکثر تعداد تکرار).

۵- OD_gap.txt: شکاف هزینهٔ سفر برای همهٔ جفت‌های O-D

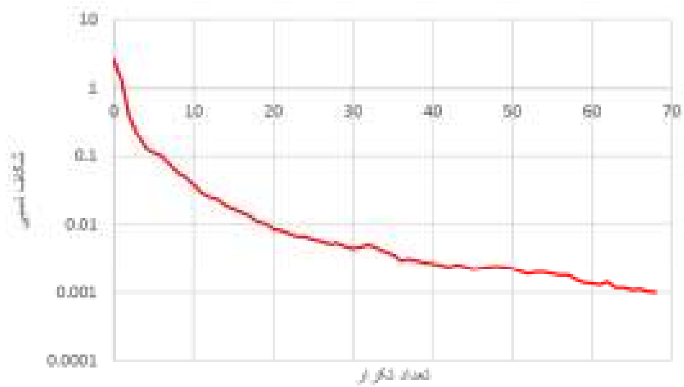
۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ابتدا تئوری محاسباتی برای تعادل کاربر پویا (DUE) در شبکه‌های بزرگ مقیاس معرفی‌شده و در ادامه با بهره‌گیری از یک روش بارگذاری شبکهٔ پویای کامل و عمومی (DNL) مبتنی بر مدل گسترش شبکهٔ LWR و تئوری تغییرات، مسئلهٔ DNL به‌عنوان یک سیستم معادلات جبری دیفرانسیلی (DAE) فرموله شده به‌طوری‌که مدل DNL حاصل، قادر به شکل‌گیری، انتشار و اتلاف صف‌های فیزیکی می‌باشد.

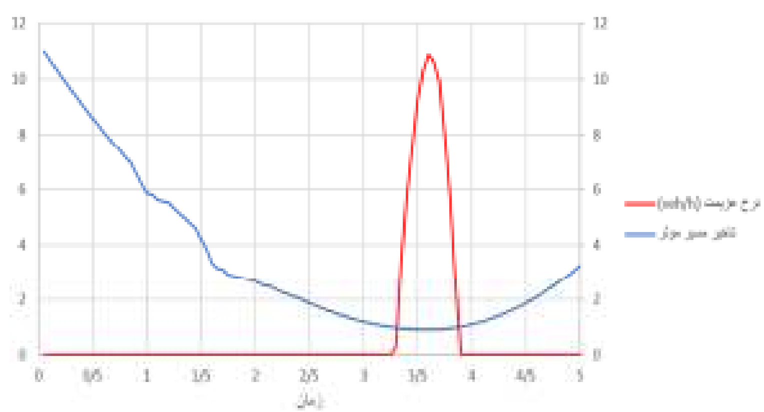
(۲۸)

$$GAP_{ij} \doteq \max\left\{\Psi_p(t,h^*) : t\in[t_0,t_f], p\in\mathcal{P}_{ij}\ \text{به طوری که}\ h_p^*>0\right\} - \min\left\{\Psi_p(t,h^*) : t\in[t_0,t_f], p\in\mathcal{P}_{ij}\ \text{به طوری که}\ h_p^*>0\right\}$$

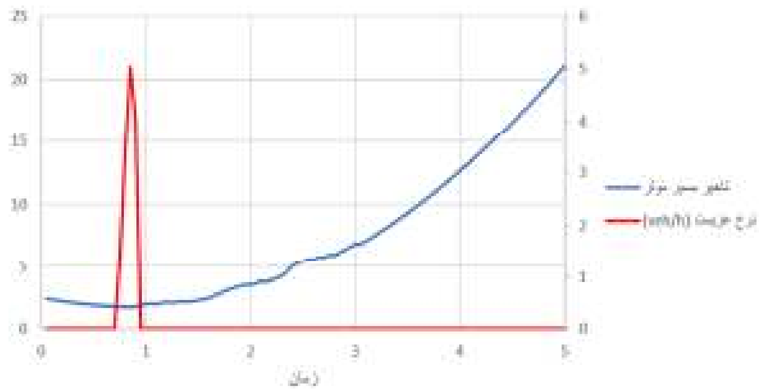
سپس برای تسهیل امر، سیستم DAE گسسته شده است. در این تحقیق برای حل مسائل DUE از الگوریتمی بر مبنای فرمول نقطه ثابت استفاده شده است. هر دو سیستم DAE و الگوریتم نقطه ثابت در قالب برنامه‌هایی به زبان ++c پیاده‌سازی شده، و برنامه‌ها به‌گونه‌ای توسعه‌یافته‌اند که می‌توان از آن‌ها برای حل مسائل DUE و DNL در هر شبکهٔ تعریف شده بهره برد. برنامه ++c نام‌برده جهت آزمایش برای شبکهٔ شهری شیکاگو با ۸۶۱۷۹ جفت O-D، ۲۵۰۰۰۰ مسیر، ۳۸۷ زون، ۹۳۳ گره و ۲۹۵۰ کمان پیاده‌سازی شده و پس از ۶۹ بار تکرار با درنظرگرفتن آستانهٔ ۰/۰۰۱ به همگرایی رسیده و نتایج آن مورد ارزیابی قرار گرفته است. باتوجه‌به شکل‌های ۶، ۷ و ۸ نشان داده شد که نرخ عزیمت به‌دست‌آمده تنها درصورتی‌که تأخیرهای مؤثر مربوطه برابر و حداقل باشد، مقادیر غیر صفر به خود می‌گیرد که با مفهوم DUE مطابقت دارد و نشان از درستی پیاده‌سازی الگوریتم دارد. همچنین در نظر گرفتن پارامتر GAP که نشان‌دهندهٔ طیف هزینه‌های سفر تجربه شده توسط مسافران در جفت O-D (i, j) می‌باشد و باتوجه به شکل ۹، مشاهده شد که اکثر شکاف‌های O-D در شبکه در محدوده‌ای بین ۰ تا ۰/۰۵ ساعت است که نشان از کیفیت خروجی‌های برنامه دارد.



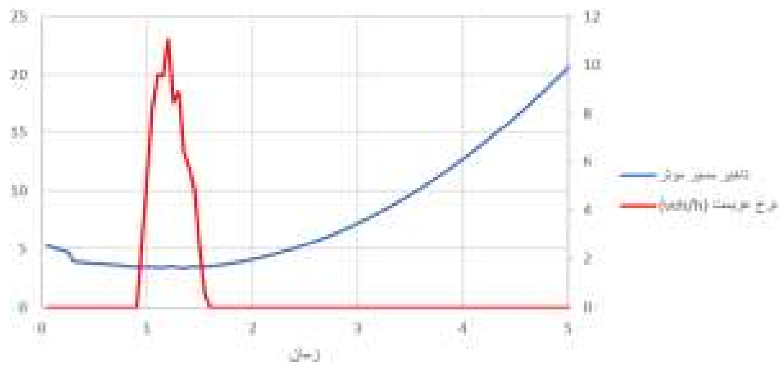
شکل ۵. شکاف نسبی حاصل از ۶۹ بار تکرار با درنظرگرفتن آستانهٔ 10^{-3}



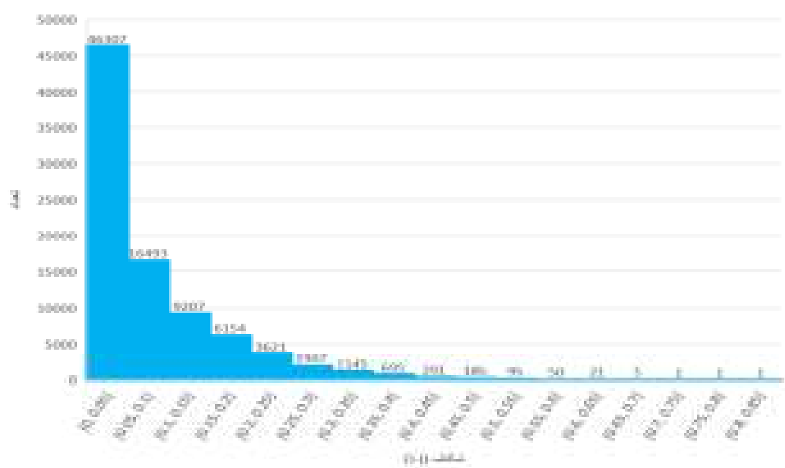
شکل ۶. تأخیر مؤثر و نرخ عزیمت مسیر ۱۱۰۰۴۷



شکل ۷. تأخیر مؤثر و نرخ عزیمت مسیر ۱۸۷۳۱۳



شکل ۸. تأخیر مؤثر و نرخ عزیمت مسیر ۲۲٤٥۹٤



شکل ۹. توزیع شکاف مبدأ - مقصدها

٦- مراجع

- جوانی، ب.، (۱۳۹۷)، "تخصیص ترافیک پویای چند کلاسی برای شبکه‌های شهری: فرمول‌بندی و الگوریتم مبتنی بر مسیر".

-Chiu YC, Bottom J, Mahut M, Paz A., Balakrishna R,Waller T, Hicks J., (2011), "Dynamic traffic assignment: a primer, Transportation Research E-Circular".

-Claudel CG, Bayen AM, (2010), "Lax-Hopf Based incorporation of internal boundary conditions into Hamilton-Jacobi equation", Part I: Theory IEEE Trans Autom Control 55(5), pp.1142–1157.

implementation", Networks and Spatial Economics.

−Long JC, Huang HJ, Gao ZY, Szeto WY., (2013), "An intersection-movement-based dynamic user optimal route choice problem", Oper Res 61(5), pp.1134–1147.

−Peeta, AK Ziliaskopoulos, (2001), "Foundations of dynamic traffic assignment: The past, the present and the future, Networks and spatial economics".

-P. Kachroo, N Shlayan, (2013), "Dynamic traffic assignment: A survey of mathematical models and techniques, Advances in Dynamic Network Modeling in Complex Transportation Systems".

−Szeto WY, Lo HK., (2004), "A cell-based simultaneous route and departure time choice model with elastic demand", Transp Res B 38(7), pp.593–612.

−W.Y. Szeto, S.C. Wong, (2012), "Dynamic traffic assignment: model classifications and recent advances in travel choice principles, Central European Journal of Engineering".

−Wang Y, Szeto WY, Han K, Friesz TL (2018), "Dynamic traffic assignment: methodological advances for environmentally sustainable road transportation applications".

−DK Merchant, GL Nemhauser, (1978), "A model and an algorithm for the dynamic traffic assignment problems", Transportation science.

−Friesz TL, Han K, Neto PA, Meimand A., Yao T., (2013), "Dynamic user equilibrium based on a hydrodynamic model", Transp Res B 47(1), pp.102–126.

−Garavello M, Han K, Piccoli B., (2016), "Models for vehicular traffic on networks", American Institute of Mathematical Sciences.

−Han K, Friesz TL, Szeto WY, Liu H., (2015), "Elastic demand dynamic network user equilibrium: formulation, existence and computation", Transp Res B., 81, pp.183–209.

−Han K, Piccoli B, Friesz TL, (2016), "Continuity of the path delay operator for dynamic network loadingwith spillback", Transp Res B 92(B), pp.211–233.

−JG Wardrop, (1952), "some theoretical aspects of road traffic research", Proceedings of the institution of civil engineers.

−K Han, G Eve, TL Friesz, (2019), "Computing dynamic user equilibria on large-scale networks with software

Application of Density and Queue Length Functions in Mesoscopic Dynamic Traffic Assignment

Shahriar Afandizadeh, Professor, School of Civil Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

Mohammad Fallah, M.Sc., Stud., School of Civil Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

Navid Kalantari, Ph.D., Consulting Manager, AECOM, Washington, USA.

E-mail: zargari@iust.ac.ir

Received: July 2022- Accepted: November 2022

ABSTRACT

One of the traditional ways to improve the condition of the networks is the construction of new roads, which is not a desirable option today, especially in crowded urban areas due to the high cost of construction. One of the effective options in this regard is traffic management methods. The issue of traffic assignment, especially dynamic traffic assignment by providing a platform for examining the status of the network under study by providing a traffic flow model is one of the important tools and components in the discussion of traffic management. In this study, using a complete and general dynamic network loading method based on LWR network expansion model, the dynamic network loading problem is formulated as a system of differential algebraic equations that the resulting dynamic network loading model is able to form, propagate and lose physical queue. In this research, an algorithm based on the fixed point formula has been used to solve dynamic user equilibrium problems. Then the software package algorithm in C ++ language is defined to implement both systems of differential algebraic equations and the fixed point algorithm by considering the queue spillback. The program is developed in such a way that it can be used to solve dynamic user balance problems and load dynamic network in any large-scale network defined by the user. The C ++ program was implemented for the Chicago metropolitan area network with 86,179 origin-destination pairs and 250,000 routes, and after 69 repetitions, the convergence threshold was reached and the results were evaluated. Finally, the results of this study are evaluated and the accuracy of the results is shown.

Keywords: Dynamic Traffic Assignment, Large-Scale, Macroscopic, Queue, Queue Spillback