

# بررسی عوامل موثر بر بازتوزیع لنگر در تیرهای سراسری پل‌های بتن آرمه با ارزیابی مقایسه‌ای آئین‌نامه بتن ایران و ACI 318-02

داود مستوفی نژاد، دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان  
فرهنگ فرحبد، دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان  
E-mail: dmostofi@cc.iut.ac.ir

## چکیده

آزمایش‌ها نشان می‌دهند که یک تیر سراسری بتن آرمه، با رسیدن لنگر در مقطع بحرانی به حد نهائی، دچار خرابی نمی‌شود، بلکه اگر سازه از شکل‌پذیری کافی برخوردار باشد، پس از تشکیل مفصل پلاستیک در نقطه بحرانی، بازتوزیع تنش و لنگر به وقوع پیوسته و سبب می‌شود که سایر نقاط سازه نیز همگون با مقطع بحرانی، به مقاومت و ظرفیت نهائی خود برسند. آئین‌نامه بتن ایران (آبا)، بازتوزیع لنگر را بر حسب درصد فولاد مقطع بیان کرده و آن را به مقدار حداکثر ۲۰ درصد کاهش یا افزایش در لنگر منفی تکیه‌گاه محدود می‌نماید. حال آن‌که آئین‌نامه ACI 318-02 درصد مجاز بازتوزیع لنگر را بر اساس کرنش کششی خالص دورترین فولاد کششی مقطع بیان کرده، و آن را به میزان حداکثر ۱۰۰۰ برابر کرنش کششی دورترین میلگرد، و یا در نهایت بیست درصد محدود می‌کند. در تحقیق حاضر، به بررسی محدودیت‌های کاربری درصد بازتوزیع مجاز لنگر، ارایه شده در آئین‌نامه بتن ایران و مقایسه آن با آئین‌نامه ACI 318 پرداخته می‌شود. به این منظور، رابطه حاکم بر درصد بازتوزیع مجاز لنگر در تیرهای سراسری، با توجه به تامین شکل‌پذیری کافی استخراج گردیده است. سپس تاثیر پارامترهای گوناگون مانند بزرگی لنگر الاستیک تکیه‌گاه، نسبت طول دهانه تیر به عمق موثر آن، و تنش تسلیم فولاد کششی، بر میزان بازتوزیع لنگر ارزیابی شده، و در هر مورد نتایج حاصله با نتایج و منحنی‌های حاصل از روش آئین‌نامه‌های ACI 318 و آبا در بازتوزیع لنگر مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهند که بازتوزیع لنگر در تیرهای سراسری بر اساس روش آبا در برخی محدوده‌ها با انتقاداتی همراه است. توضیح بیشتر در این مورد، در اصل مقاله ارایه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: بازتوزیع لنگر، بتن مسلح، تقاضای شکل‌پذیری، ظرفیت شکل‌پذیری، لنگر کشسان

## ۱. مقدمه

لنگر برای طراحی هر مقطع به کار گرفته می‌شود. بنابراین برای هر یک از شرایط بارگذاری مورد نظر، برخی از مقاطع در یک دهانه مورد نظر به لنگر نهایی خود می‌رسند؛ حال آن‌که سایر مقاطع دارای یک ظرفیت باربری ذخیره می‌باشند. آزمایش‌ها نشان می‌دهند که یک سازه می‌تواند بارهای اضافی را تحمل کند، به شرط آن‌که مقطعی که به ظرفیت خمشی خود رسیده‌اند، با دوران

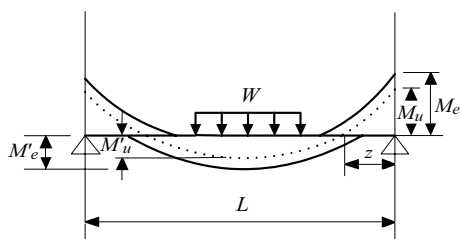
بازتوزیع لنگرهای خمشی یکی از مسائل مهم در طراحی تیرهای بتن مسلح سراسری محسوب می‌شود و همواره مورد توجه بسیاری از محققین و مهندسين طراح قرار داشته است. بر اساس آئین‌نامه ACI 318، اعضای سراسری باید برای تحمل ترتیب‌های گوناگون بار زنده طراحی شوند. به این ترتیب که تحلیل کشسانی (الاستیک) برای هر وضعیت بارگذاری، انجام شده و مقادیر پوش

است. آئین‌نامه بتن ایران، بازتوزیع لنگر را برای هر نوع ترتیب بارگذاری به مقدار حداکثر  $20\{1 - 0.7[(\rho - \rho')/\rho_b]\}\%$  محدود می‌نماید؛ مشروط بر آن که لنگر سایر مقاطع با توجه به شرایط تعادل بارها اصلاح شوند [۶]. لازم به ذکر است که مقدار  $\rho_b$  در آئین‌نامه ایران با اعمال ضرائب ایمنی جزئی بتن و فولاد، برابر با  $0.714\rho_b$  در آئین‌نامه ACI 318 می‌باشد. آئین‌نامه مذکور بازتوزیع لنگر را برای اطمینان از دارا بودن شکل‌پذیری مناسب، در صورتی مجاز می‌داند که مقدار  $\rho$  یا  $\rho - \rho'$  کوچک‌تر از  $0.7\rho_b$  باشد، حال آن‌که آئین‌نامه ACI 318-02، درصد مجاز بازتوزیع لنگر را بر اساس کرنش کششی خالص دورترین فولادکششی مقطع ( $\epsilon_f$ ) بیان نموده، و آن را به میزان حداکثر  $1000\epsilon_f$  یا در نهایت ۲۰٪ محدود می‌کند. این آئین‌نامه شرط داشتن کرنش  $\epsilon_f$  حداقل  $0.0075$  در مقاطع بحرانی را به منظور تامین شکل‌پذیری کافی برای بازتوزیع لنگر در اعضای خمشی سراسری ضروری می‌داند [۷].

### ۳. بازتوزیع قراردادی

شکل ۱، دهانه داخلی یک تیر سراسری بتن‌آرمه به طول  $L$  تحت بار گسترده یکنواخت  $W$  را نشان می‌دهد. لنگرهای حداکثر به‌دست آمده از تحلیل کشسانی برای ترتیب‌های مختلف بارگذاری در تکیه‌گاه و وسط دهانه، به ترتیب با  $M_e$  و  $M'_e$  نمایش داده شده‌اند. پس از انجام عمل بازتوزیع، مقادیر لنگر در تکیه‌گاه و وسط دهانه برابر  $M_u$  و  $M'_u$  می‌گردند. درصد بازتوزیع لنگر ( $R$ ) بر پایه لنگر کشسان  $M_e$ ، به عنوان نمونه برای تکیه‌گاه برابر است با:

$$R = 100[(M_e - M_u)/M_e] \quad (1)$$



شکل ۱. نمایش لنگرهای کشسان و غیرکشسان

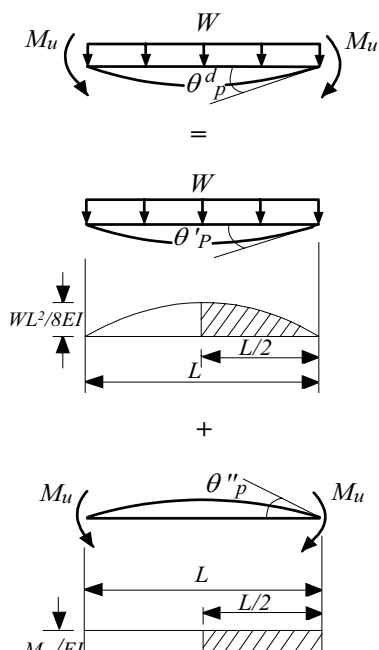
در مفصل پلاستیک، لنگرها را به مقاطع دیگر و تا زمانی که مکانیزم خرابی تشکیل شود، انتقال دهند. این ظرفیت باربری اضافی، امکان طراحی را بر مبنای بازتوزیع لنگر در سازه فراهم می‌آورد [۱]. لذا بازتوزیع لنگر، این اجازه را به طراح می‌دهد که منحنی لنگر خمشی به‌دست آمده از تحلیل کشسانی را اصلاح نماید. فلسفه کلی این کار، کاهش لنگر در مقاطع بحرانی (ناحیه تشکیل اولین مفصل پلاستیک)، به شرط افزایش لنگر در مقاطع دیگر، با توجه به شرایط تعادل بارها می‌باشد. همچنین بازتوزیع لنگر موجب می‌شود که از تراکم میلگردها در نواحی لنگر حداکثر کاسته شود.

اولین تحقیقات آزمایشگاهی در رابطه با بازتوزیع لنگر در تیرهای سراسری، توسط ماتوک در سال ۱۹۵۹ [۲] و سپس توسط کوهن در سال ۱۹۶۴ [۳]، صورت گرفت. آنها نشان دادند که بازتوزیع لنگر تا میزان حداکثر ۲۵٪، تغییرات چندانی را در ترک‌ها و انحنای تیری که لنگرهای خمشی آن بر مبنای تئوری الاستیک طراحی شده است، به‌وجود نمی‌آورد. شولز در سال ۱۹۹۳، اثرات لاغری و سختی تیر را بر بازتوزیع لنگر تیرهای سراسری، با استفاده از مفهوم شکل‌پذیری بررسی نمود و روش پیشنهادی خود را با مقادیر مجاز بازتوزیع لنگر در آئین‌نامه کانادا (CAN3-A23.3-M84)، مقایسه نمود [۴]. لین و چیان در سال ۲۰۰۰، تاثیر میزان فولاد عرضی و طولی و مقاومت فشاری بتن را بر شکل‌پذیری و بازتوزیع لنگر، در ۲۶ نمونه تیر بتن‌آرمه سراسری، آزمایش کردند. آنها نتیجه گرفتند که فولاد عرضی، موجب محصور شدن بتن و افزایش بازتوزیع می‌گردد، همچنین کاهش فولاد کششی و افزایش فولاد فشاری، افزایش شکل‌پذیری و بازتوزیع لنگر را به دنبال دارد [۵].

در بررسی حاضر، میزان مجاز بازتوزیع لنگر در تیرهای سراسری، با استفاده از مفهوم ظرفیت و تقاضای شکل‌پذیری به‌دست آورده می‌شود. همچنین تاثیر عوامل مختلف، نظیر نسبت طول دهانه تیر به عمق موثر آن، تنش تسلیم فولاد و بزرگی لنگر کشسان (الاستیک) تکیه‌گاه، بر بازتوزیع مجاز لنگر در تیرهای سراسری ارزیابی شده و در هر حالت با مقادیر مجاز بازتوزیع ارایه شده در آئین‌نامه بتن ایران (آبا) و آئین‌نامه ACI 318، مقایسه می‌شود.

### ۲. بازتوزیع در آئین‌نامه

بازتوزیع لنگر در تیرهای سراسری به شرط داشتن ظرفیت دورانی حداقل و شکل‌پذیری کافی در نواحی مفصل پلاستیک امکان‌پذیر



شکل ۳. نمایش تغییر شکل تیر جهت تعیین میزان دوران مفصل پلاستیک تکیه‌گاه با استفاده از قضیه لنگر سطح

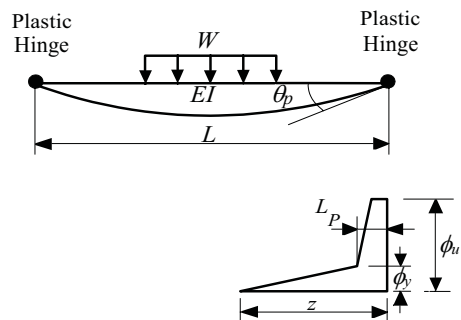
شرط اساسی برای آنکه تیر سراسری دارای شکل‌پذیری کافی برای باز توزیع لنگر باشد، آن است که  $\theta_p^a$  همواره بزرگتر یا مساوی  $\theta_p^d$  گردد. بنابراین با جای‌گذاری  $EI$  از رابطه (۵) در رابطه (۳)، و ارضای این شرط مهم می‌توان نوشت:

$$(\phi_u - \phi_y)L_p \geq \frac{L}{2} \left( \frac{WL^2}{12M_u} - 1 \right) \phi_y \quad (6)$$

اگر رابطه (۶) ساده‌سازی شود، نسبت  $\phi_u/\phi_y$  به صورت نامساوی زیر قابل نمایش است:

$$\frac{\phi_u}{\phi_y} \geq 1 + \frac{L}{2L_p} \left( \frac{WL^2}{12M_u} - 1 \right) \quad (7)$$

حال با جای‌گذاری  $M_u$  از رابطه (۲) در نامساوی (۷)، نسبت  $\phi_u/\phi_y$  که تقاضای شکل‌پذیری نامیده می‌شود، بر حسب میزان باز توزیع  $R$  و لنگر الاستیک  $M_e$  به دست خواهد آمد، یعنی:



شکل ۲. نمایش دوران‌های مفصل پلاستیک و انحنای

$M_u$  در رابطه (۱) را می‌توان بر حسب  $R$  و  $M_e$ ، به صورت زیر نوشت:

$$M_u = M_e (1 - R/100) \quad (2)$$

#### ۴. تقاضای شکل‌پذیری

فرض کنید که تیر سراسری شکل ۲ دارای سختی ثابت  $EI$  باشد و مفصل پلاستیک، ابتدا در تکیه‌گاه تشکیل شود. در آن صورت، همان‌گونه که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود، میزان دوران مفصل پلاستیک مورد تقاضای تکیه‌گاه را می‌توان با استفاده از قضایای لنگر سطح، به صورت زیر بیان نمود:

$$\theta_p^d = \theta_p^a - \theta_p^e = \frac{L}{2EI} \left( \frac{WL^2}{12} - M_u \right) \quad (3)$$

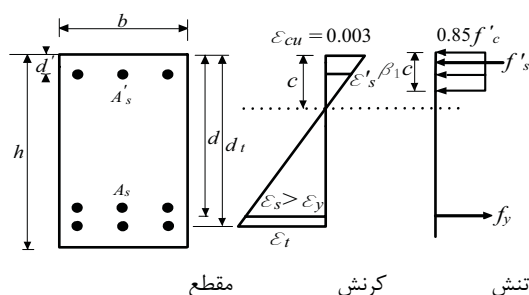
که در رابطه (۳)  $E$  مدول الاستیسیته بتن و  $I$  ممان اینرسی مقطع تیر است.

همچنین دوران مفصل پلاستیک یک مقطع بحرانی را که تحت عنوان ظرفیت دورانی موجود موسوم است، می‌توان به شکل زیر نوشت [۸]:

$$\theta_p^a = (\phi_u - \phi_y)L_p \quad (4)$$

همان‌طور که در شکل ۲ نیز نشان داده شده است، انحنای نهایی،  $\phi_y$  انحنای حد تسلیم و  $L_p$  طول مؤثر مفصل پلاستیک است. از سویی  $\phi_u$ ، با فرض یک منحنی دو خطی ایده‌آل به عنوان رابطه لنگر-انحنای یک تیر بتن‌آرمه برابر است با [۸]:

$$\phi_y = M_u/EI \quad (5)$$



شکل ۴. نمودار تنش و کرنش یک تیر بتن آرمه در حالت نهائی

حال با جای‌گذاری  $c/d$  در رابطه (۱۲)، نسبت  $\phi_u/\phi_y$  به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\phi_u}{\phi_y} = \frac{(\varepsilon_t + \varepsilon_{cu})(1-k)}{(d_t/d)(f_y/E_s)} \quad (15)$$

### ۶. درصد بازتوزیع مجاز لنگر

به منظور دستیابی به ظرفیت دورانی حداقل و داشتن شکل‌پذیری مناسب برای بازتوزیع لنگر، باید نسبت تقاضای شکل‌پذیری و ظرفیت شکل‌پذیری، لااقل با یکدیگر برابر گردند. لذا با مساوی قرار دادن سمت راست روابط (۸) و (۱۴)، مقدار بازتوزیع مجاز لنگر  $R$  به شرح زیر استخراج می‌گردد:

$$R=100 \left\{ 1 - \frac{WL^2/12}{M_e \left( \frac{2L_p}{L} \left[ \frac{(\varepsilon_t + \varepsilon_{cu})(1-k)}{(d_t/d)(f_y/E_s)} - 1 \right] + 1 \right)} \right\} \quad (16)$$

شکل ۵ منحنی تغییرات درصد بازتوزیع مجاز لنگر را بر حسب کرنش خالص دورترین فولاد کششی مقطع، با استفاده از رابطه (۱۵)، برای یک تیر سراسری با فرض  $L/L_p = 38$ ،  $f_y = 400 \text{ MPa}$ ،  $\varepsilon_{cu} \cong 0.003$ ،  $d_t = d$  و لنگر الاستیک تکیه‌گاه  $M_e = WL^2/12$  نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، اولاً انطباق نسبتاً خوبی بین نتیجه حاضر و نتیجه

$$\frac{\phi_u}{\phi_y} \geq 1 + \frac{L}{2L_p} \left( \frac{WL^2}{12M_e(1-R/100)} - 1 \right) \quad (8)$$

### ۵. ظرفیت شکل‌پذیری

انحنای نهائی مقطع یک تیر با توجه به نمودار کرنش در لحظه گسیختگی، برابر است با:

$$\phi_u = \varepsilon_{cu}/c \quad (9)$$

که  $\varepsilon_{cu} \cong 0.003$  کرنش نهائی بتن است. انحنای شروع تسلیم را می‌توان طبق رابطه (۱۰) بیان کرد، که در آن  $E_s$  و  $f_y$  به ترتیب تنش تسلیم و مدول الاستیسیته فولاد،  $d$  عمق موثر مقطع، و  $k$  نسبت عمق تار خشی در شروع تسلیم فولاد به عمق موثر بوده و مقدار آن از رابطه (۱۱) به دست می‌آید [۸]. چگونگی محاسبه  $k$  در پیوست ۱ آورده شده است.

$$\phi_y = \frac{f_y/E_s}{d(1-k)} \quad (10)$$

$$k = \frac{[(\rho + \rho')^2 n^2 + 2(\rho + \rho' d'/d)n]^{1/2}}{-(\rho + \rho')n} \quad (11)$$

با تقسیم رابطه (۹) به رابطه (۱۰)، ضریب ظرفیت شکل‌پذیری برابر خواهد شد با:

$$\frac{\phi_u}{\phi_y} = \frac{\varepsilon_{cu}}{f_y/E_s} \frac{d(1-k)}{c} \quad (12)$$

از طرفی با توجه به سازگاری کرنش‌ها، مطابق شکل ۴، رابطه زیر بین  $\varepsilon_t$  و  $c/d_t$  برقرار است:

$$c/d_t = \varepsilon_{cu}/(\varepsilon_t + \varepsilon_{cu}) \quad (13)$$

که  $d_t$  فاصله دورترین فولاد کششی از دورترین تار فشاری مقطع است. با استفاده از رابطه فوق، می‌توان نوشت:

$$c/d = (d_t/d) [\varepsilon_{cu}/(\varepsilon_t + \varepsilon_{cu})] \quad (14)$$

$$L_p = k_1 k_2 k_3 (z/d)^{1/4} d \quad (17)$$

که در آن:

$$k_1 = \text{فولاد نرمه برابر } 0.7$$

$$k_2 = \text{اعضای بدون نیروی فشاری محوری برابر یک}$$

$$k_3 = 35.2 \text{ MPa} = f'_c = 0.6$$

$$f'_c = 11.7 \text{ MPa} = 0.9$$

$$d = \text{عمق مؤثر مقطع بر حسب میلی متر}$$

$Z = \text{فاصله مقطع بحرانی تا نقطه عطف در نمودار لنگر می باشد.}$

سواآیردر سال ۱۹۶۴، رابطه زیر را برای  $L_p$  پیشنهاد کرد [۸]:

$$L_p = 0.075z + 0.25d \quad (18)$$

ماتوک در سال ۱۹۶۷،  $L_p$  را به صورت زیر تعریف نمود [۸]:

$$L_p = 0.05z + 0.5d \quad (19)$$

پائولی و پرستلی در سال ۱۹۹۲ نشان دادند که طول مفصل پلاستیک، تابعی از  $Z$ ، تنش تسلیم فولاد ( $f_y$ ) و قطر فولاد طولی ( $d_b$ ) می باشد [۱۰]:

$$L_p = 0.08z + 0.022f_y d_b \geq 0.044f_y d_b \quad (20)$$

لمان و همکاران در سال ۱۹۹۸، رابطه جدیدی را برای طول مفصل پلاستیک ارائه کردند [۱۱]:

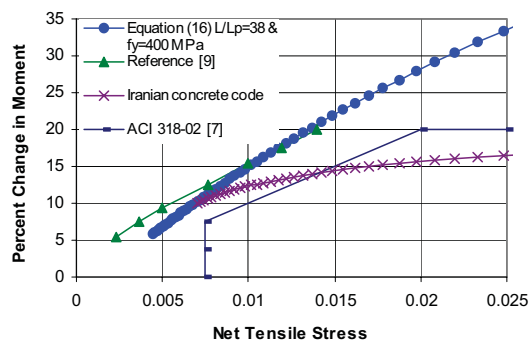
$$L_p = 0.5\alpha z + 1.2\alpha (f_u / 4\sqrt{f'_c}) d_b \quad (21)$$

$$\alpha = \frac{M_u - M_y}{M_u} \cong \frac{f_u - f_y}{f_u} \quad (22)$$

که  $f_u$  تنش فولاد در حالت نهایی (MPa)،  $f'_c$  مقاومت فشاری بتن (MPa)،  $M_y$  لنگر در آغاز تسلیم فولاد کششی و  $M_u$  لنگر نهایی مقطع است. پاناگیوتاکوس و فردیس در سال ۲۰۰۱ نیز رابطه ای مشابه پائولی و پرستلی برای  $L_p$  به شرح زیر ارائه نمودند [۱۲]:

$$L_p = 0.12z + 0.014f_y d_b \quad (23)$$

موجود ارائه شده در مرجع [۹] به دست آمده است؛ ثانیاً با افزایش کرنش کششی  $\epsilon_f$ ، میزان باز توزیع مجاز لنگر نیز افزایش یافته است.



شکل ۵. درصد باز توزیع مجاز لنگر برای حداقل ظرفیت دورانی

شکل ۵ همچنین نشان می دهد که آئین نامه ACI 318 حاشیه ایمنی مناسبی را برای باز توزیع مجاز لنگر ارائه داده است؛ حال آن که آئین نامه آبا، در محدوده  $\epsilon_f = 0.015 - 0.025$ ، مقادیر باز توزیع را نسبتاً کوچک پیش بینی کرده و در محدوده  $\epsilon_f = 0.0075 - 0.015$  مقادیر باز توزیع بزرگی را نشان می دهد.

## ۷. بررسی تاثیر $L/d$ بر میزان باز توزیع لنگر

همان گونه که در رابطه (۱۶) مشاهده می شود، درصد باز توزیع لنگر به نسبت  $L/L_p$  وابسته است؛ لذا برای آنکه بتوان تاثیر نسبت طول دهانه  $L$  به عمق مؤثر  $d$  را بر روی میزان باز توزیع به دست آورد، لازم است که ابتدا طول مفصل پلاستیک ( $L_p$ )، مشخص شود.

### الف- طول مفصل پلاستیک

تا کنون روابط گوناگونی برای طول معادل مفصل پلاستیک ارائه شده که به صورت اجمالی می توان به تعاریف زیر اشاره کرد. بیکر در سال ۱۹۵۶،  $L_p$  را برابر  $0.5d$  در نظر گرفت. وی همچنین در سال ۱۹۶۴، رابطه زیر را برای  $L_p$ ، در اعضای بتنی محصور نشده مطرح نمود [۹]:

همچنین در رابطه (۲۶)، برای  $L/d$  مساوی ۲۵، ۲۰ و ۱۵،  $L/L_p$  به ترتیب برابر ۴۰، ۳۶ و ۳۱ به دست می‌آید.

به همین ترتیب در رابطه (۱۹) با فرض  $z = 0.2L$ ،  $L/L_p$  برابر خواهد شد با:

$$L/L_p = 1/(0.010 + 0.5d/L) \quad (27)$$

در رابطه (۲۷) نیز، برای  $L/d$  برابر با ۲۵، ۲۰ و ۱۵،  $L/L_p$  به ترتیب برابر ۳۳، ۲۹ و ۲۳ به دست می‌آید.

با مقایسه سه رابطه (۲۵)، (۲۶) و (۲۷)، ملاحظه می‌شود که رابطه (۲۵) و (۲۷) تقریباً نتایج نزدیک به یکدیگر، ولی رابطه (۲۶) مقادیر بزرگتری را برای  $L/L_p$  نتیجه می‌دهد.

شکل ۶ منحنی تغییرات درصد بازتوزیع مجاز لنگر بر حسب کرنش  $\epsilon_f$  را بر اساس رابطه ۱۶، با فرض  $f_y = 400 \text{ MPa}$  و لنگر کشسان تکیه‌گاه برابر با  $M_e = WL^2/12$ ، برای  $L/d$  های مختلف (طبق رابطه ۲۶، سوایر) نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با بزرگتر شدن نسبت  $L/d$ ، میزان بازتوزیع مجاز لنگر کمتر شده است.

همچنین اگر  $z = 0.15L$  فرض شود، با جای‌گذاری در رابطه (۱۸)،  $L/L_p$  برابر می‌شود با:

$$L/L_p = 1/(0.01125 + 0.25d/L) \quad (28)$$

در این صورت اگر  $L/d = 25$  باشد،  $L/L_p = 47$  خواهد شد. منحنی درصد بازتوزیع لنگر بر حسب  $\epsilon_f$ ، برای این حالت نیز در شکل ۶ آورده شده است. بنابراین مشاهده می‌شود که آئین‌نامه ACI 318-02 حاشیه اطمینان مناسبی را حتی برای  $L/d$  های بزرگ لحاظ نموده، که در آئین‌نامه بتن ایران، این محدوده ایمنی دیده نمی‌شود.

طول مفصل پلاستیک بر اساس روابط (۲۰) و (۲۳) نیز با فرض  $z = 0.2L$  و  $f_y = 400 \text{ MPa}$ ، قطرهای مختلف برای میلگرد طولی و همچنین طول دهانه‌های گوناگون،  $L/L_p$  حدود ۲۰ الی ۳۰ را نتیجه می‌دهد. اما  $L_p$  بر مبنای رابطه (۲۱)، مستلزم دانستن مشخصات دیگری چون مقاومت نهایی فولاد، مقاومت فشاری بتن، و ضریب  $\alpha$  می‌باشد. بنابراین با فرض کردن

در تمامی روابط فوق،  $f_y$  بر حسب MPa،  $d_b$  و  $z$  بر حسب mm می‌باشند. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد، در روابط (۱۷) تا (۱۹) طول مفصل پلاستیک تنها به  $z$  و عمق موثر وابسته است. حال آنکه در روابط (۲۰) تا (۲۳)، طول مفصل پلاستیک از دو جمله اساسی تشکیل شده است. جمله اول مربوط به اثر خمشی (پارامتر  $z$ ) بوده و جمله دوم مربوط به اثر لغزش مهاری میلگردهای طولی می‌باشد.

### ب- رابطه بین $L/d$ و $L/L_p$

به منظور تعیین رابطه میان  $L/d$  و  $L/L_p$ ، ابتدا لازم است  $z$  محاسبه شود. برای موارد عملی، در یک تیر سراسری با دهانه‌های مساوی تحت بار گسترده  $W$ ،  $z$  از  $0.15L$  تا  $0.2L$  به ترتیب برای  $M_u = WL^2/16$  و  $M_u = WL^2/12$  تغییر می‌کند. نکته دیگر، محدودیتی است که آئین‌نامه ACI 318 برای خیز تیرهای سراسری، بر نسبت طول دهانه تیر به ارتفاع مقطع آن به صورت  $L/h \leq 21$  اعمال می‌کند. بنابراین با توجه به اینکه  $h$  به طور معمول بین  $1.1d$  تا  $1.2d$  می‌باشد،  $L/d$  حداکثر می‌تواند برابر ۲۵ گردد. حال برای محاسبه  $L_p$  بر مبنای رابطه (۱۷)،  $k_1 = 0.7$  و  $k_3$  را به طور متوسط می‌توان  $0.75$  فرض نمود. بنابراین با فرض  $z = 0.2L$ ،  $L_p$  برابر می‌گردد با:

$$L_p = 0.525(0.2L)^{1/4} d^{3/4} \quad (24)$$

نسبت  $L/L_p$  از رابطه (۲۴)، به صورت زیر خواهد شد:

$$L/L_p = 2.8483(L/d)^{3/4} \quad (25)$$

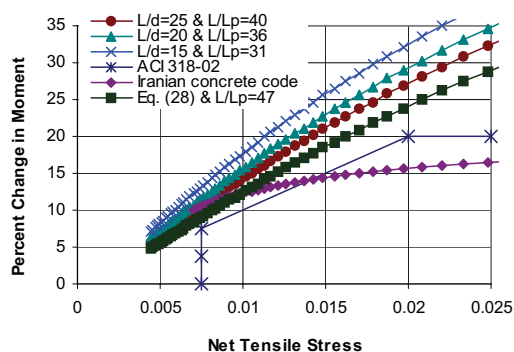
لذا برای مقادیر گوناگون  $L/d$  در رابطه (۲۵)، نسبت‌های مختلف  $L/L_p$  به دست خواهد آمد. به عنوان مثال برای  $L/d$  برابر با ۲۵، ۲۰ و ۱۵،  $L/L_p$  به ترتیب برابر ۳۲، ۲۷ و ۲۲ خواهد شد.

در رابطه (۱۸) نیز با در نظر گرفتن  $z = 0.2L$ ،  $L/L_p$  مستقیماً به صورت زیر استخراج می‌شود:

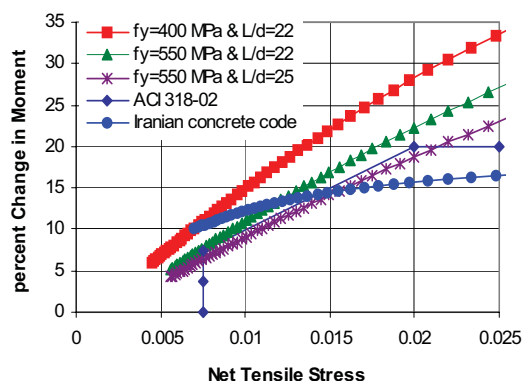
$$L/L_p = 1/(0.015 + 0.25d/L) \quad (26)$$

است. شکل مزبور نشان می‌دهد که با بزرگ‌تر شدن لنگر الاستیک تکیه‌گاه، میزان بازتوزیع مجاز لنگر نیز بیشتر شده است. نکته دیگر آن‌که به ازای یک کرنش مشخص مثلاً  $\epsilon_r = 0.02$ ، با در نظر گرفتن لنگرهای کشسان  $WL^2/12$  و  $WL^2/11$ ، برای یک لنگر نهائی مشابه  $M_u = WL^2/16.7$ ، به ترتیب مقادیر بازتوزیع مجاز ۲۸ درصد و ۳۴ درصد به دست می‌آید. حال آن‌که آئین‌نامه ACI 318 و آبا برای این مقدار کرنش، تنها میزان بازتوزیع ۲۰٪ را مجاز می‌دانند. علت محدود نمودن میزان بازتوزیع بیشتر در آئین‌نامه ACI 318 و آبا را می‌توان در جلوگیری از بروز ترک‌های بزرگ، تحت اثر لنگرهای بهره‌برداری دانست، هر چند آئین‌نامه انگلستان (BS 8110)، درصد بازتوزیع لنگر حتی تا میزان ۳۰٪ را نیز مجاز می‌داند [۴].

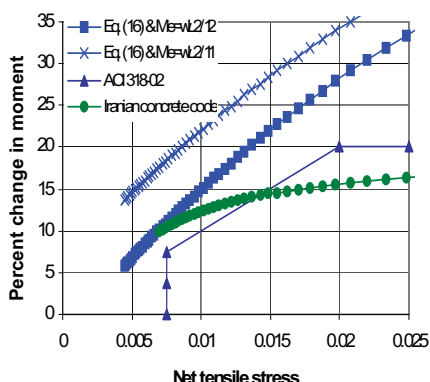
فرضیات مشابه فوق،  $L/L_p$  حدود ۲۵ الی ۳۵ نتیجه می‌شود که در هر حال محدوده ایمنی آئین‌نامه ACI 318 در این موارد نیز قابل تشخیص است.



شکل ۶. بازتوزیع مجاز لنگر برای نسبت‌های مختلف طول دهانه به عمق مؤثر



شکل ۷. درصد بازتوزیع مجاز لنگر برای فولادهای با تنش تسلیم متفاوت



شکل ۸. درصد بازتوزیع مجاز لنگر برای مقادیر گوناگون لنگر الاستیک تکیه‌گاه

## ۸. تاثیر تنش تسلیم فولاد بر بازتوزیع لنگر

تنش تسلیم فولاد یکی دیگر از پارامترهای مؤثر بر بازتوزیع لنگر است. شکل ۷ منحنی درصد بازتوزیع مجاز لنگر را بر حسب کرنش  $\epsilon_r$ ، با در نظر گرفتن لنگر الاستیک  $M_e = WL^2/12$ ، و همچنین  $L/d = 22$ ، برای دو مقدار تنش تسلیم فولاد  $f_y = 400, 550$  MPa نشان می‌دهد. همان‌گونه که بر اساس رابطه (۱۶) انتظار می‌رفت، با بزرگ‌تر شدن تنش تسلیم، درصد بازتوزیع کوچک‌تری نتیجه شده است. همچنین شکل (۷) نشان می‌دهد که منحنی به دست آمده طبق رابطه (۱۶) برای  $f_y = 550$  MPa و  $L/d = 25$ ، بازتوزیعی اندکی کمتر از مقدار مجاز آئین‌نامه ACI را نتیجه خواهد داد؛ در حالی‌که آئین‌نامه بتن ایران، در محدوده کرنش بین ۰/۰۰۷۵ تا ۰/۰۱۵، بازتوزیع غیر مجازی را نشان می‌دهد.

## ۹. اثر لنگر کشسان تکیه‌گاه

به منظور بررسی اثر بزرگی لنگر الاستیک تکیه‌گاه بر درصد بازتوزیع مجاز لنگر، منحنی تغییرات بازتوزیع لنگر بر حسب کرنش کششی  $\epsilon_r$ ، با فرض  $L/L_p = 38$  و برای دو لنگر الاستیک  $M_e = WL^2/11$  و  $M_e = WL^2/12$  مطابق رابطه (۱۶)، در شکل ۸ ترسیم شده

## ۱۰. نتیجه گیری

در این تحقیق، تاثیر عوامل مختلف بر بازتوزیع لنگر تیرهای سراسری با دهانه‌های مساوی، تحت اثر بار گسترده یکنواخت، با استفاده از مفهوم تقاضای شکل‌پذیری و ظرفیت شکل‌پذیری، مورد ارزیابی قرار گرفت.

رابطه اساسی بازتوزیع مجاز لنگر، با به کار بردن این مفهوم و لزوم تامین ظرفیت دورانی حداقل به دست آمد. با به کارگیری این رابطه، منحنی درصد بازتوزیع مجاز لنگر بر حسب کرنش دورترین فولاد کششی مقطع، با در نظر گرفتن اثرات نسبت طول به عمق موثر تیر، تنش تسلیم فولاد کششی، و بزرگی لنگر الاستیک تکیه‌گاه ترسیم شد، و در هر حالت با مقادیر مجاز بازتوزیع ارائه شده در آئین‌نامه بتن ایران و ACI 318-02 مقایسه گردید. بررسی های انجام شده نشان دادند:

- ۱- میزان بازتوزیع مجاز لنگر با افزایش کرنش در دورترین فولاد کششی مقطع افزایش می‌یابد.
- ۲- در این تحقیق با توجه به تعاریف گوناگونی که برای تعیین

طول معادل مفصل پلاستیک در اعضای خمشی سراسری ارائه شده است، رابطه بین نسبت طول تیر به عمق موثر آن ( $L/d$ ) و نسبت طول تیر به طول مفصل پلاستیک ( $L/L_p$ ) به دست آمد. روابط حاصل شده نشان داد که با افزایش نسبت  $L/d$ ، نسبت  $L/L_p$  نیز بزرگتر شده و در نتیجه کاهش در میزان بازتوزیع مجاز لنگر را به دنبال دارد.

۳- افزایش مقاومت تسلیم در فولاد کششی، سبب کاهش در میزان بازتوزیع مجاز لنگر می‌شود.

۴- میزان بازتوزیع مجاز لنگر با بزرگ شدن لنگر الاستیک تکیه‌گاه افزایش می‌یابد.

۵- روش آئین‌نامه بتن (ایران) آبا، برای تیرهای بتن آرمه لاغر و تیرهای با فولاد کششی با مقاومت بالا، به مقادیر بازتوزیع غیرمجازی منتهی می‌شود. اما آئین‌نامه ACI 318-02، به جز در مورد تیرهایی که تواما بسیار لاغر بوده و دارای فولاد با تنش تسلیم بالا باشند، بازتوزیع لنگر را با حاشیه ایمنی مناسبی ارائه می‌دهد.

## ۱۱. مراجع

- 4- Scholz, H. (1993) "Contribution to redistribution of moments in continuous reinforced concrete beams," ACI Structural Journal, Vol. 90, No. 2, pp. 150-155.
- 5- Lin, Chien-Hung, and Chien, Yu-Min, (2000) "Effect of section ductility on moment redistribution of continuous concrete beams," Journal of Chinese Institute of Engineers, Transactions of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 23, No. 2, pp. 131-141.
- 6- آئین‌نامه بتن ایران (آبا)، دفتر امور فنی و تدوین معیارها، نشریه شماره ۱۲۰، سازمان مدیریت و برنامه‌ریزی کشور، چاپ سوم، سال ۱۳۸۱.
- 1- Notes on ACI 318-02, "Building code requirements for structural concrete with design applications," Portland Cement Association, Section 8.4, Washington D.C., 2002.
- 2- Mattock, A. H. (1959) "Redistribution of design bending moments in reinforced concrete continuous beams," Proceedings, Institution of Civil Engineers (London), Vol. 13, pp. 35-46.
- 3- Cohn, M. Z. (1964) "Rotational compatibility in the limit design of reinforced concrete continuous beams," Proceedings, International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI, Miami, November 1964, pp. 359-382.



- 10- Paulay, T. and Priestley, M. J. N. "Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings," New York, John Wiley & Sons, 1992.
- 11- Leman, D. E., Calderone, A. J. and Moehle, J.P. "Behavior and design of slender columns subjected to lateral loading," 6<sup>th</sup>. US National Conference on Earthquake Engineering, Seattle, Washington, EERI, , May 31. June 4., 1998.
- 12- Panagiotakos, T. and Fardis, M. N. (2001) "Deformation of RC members at yeilding and utimate" ACI Structural Journal, Vol. 98, No. 2, pp. 135-148.
- 7- ACI Committee 318 "Building code requirements for reinforced concrete and commentary (ACI 318-02/ACI 318R-89)," American Concrete Institute, Detroit, 2002.
- 8- Park, R., and Paulay, T. "Reinforced concrete structures", London, John Wiley & Sons, 1975.
- 9- Mast, R. F. (1992) "Unified design provisions for reinforced and prestressed concrete flexural and compression members," ACI Structural Journal, Vol. 89, No. 2, , pp. 185-199.

### (پیوست)

محاسبه محل تار خشی در شروع تسلیم فولاد کششی ( $k$ ) شکل (پ ۱) را در نظر گرفته، با توجه به توزیع خطی کرنش در مقطع تیر و شروع تسلیم در فولاد کششی، کرنش در دورترین تار فشاری تیر برابر است با:

$$\varepsilon_c = \frac{k\varepsilon_y}{1-k} = \frac{k(f_y/E_s)}{1-k} \quad (\text{پ ۱})$$

همچنین کرنش در فولاد فشاری، بر حسب  $\varepsilon_c$  و در نهایت با جاگذاری به جای  $\varepsilon_c$  از رابطه (پ ۱)، به صورت رابطه (پ ۲) قابل بیان است:

$$\varepsilon'_s = \frac{(kd-d')\varepsilon_c}{kd} = (k - \frac{d'}{d}) \left( \frac{f_y/E_s}{1-k} \right) \quad (\text{پ ۲})$$

از طرفی نیرو در فولاد کششی و فشاری به ترتیب برابرند با:

$$T = A_s f_y = \rho b d f_y \quad (\text{پ ۳})$$

$$C_s = A'_s f'_s = \rho' b d (E_s \varepsilon'_s) = \rho' b d \left( k - \frac{d'}{d} \right) \left( \frac{f_y}{1-k} \right) \quad (\text{پ ۴})$$

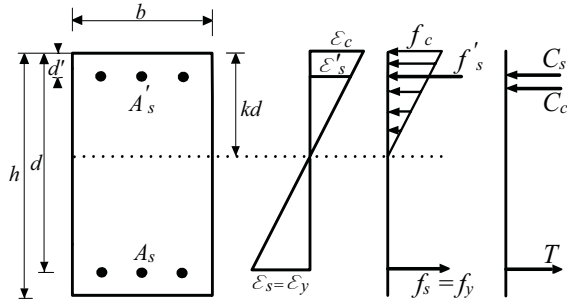
با توجه به توزیع الاستیک خطی تنش بتن در این حالت و جاگذاری به جای  $\varepsilon_c$  از رابطه (پ ۱)، نیروی موجود در بتن فشاری را می توان به صورت زیر نوشت:

$$C_c = 1/2 f_c b k d = 1/2 E_c \varepsilon_c b k d = 1/2 \left( \frac{E_c}{E_s} \right) \left( \frac{k^2}{1-k} \right) b d f_y \quad (\text{پ ۵})$$

رابطه زیر با نوشتن تعادل نیروهای داخلی، همواره در مقطع تیر برقرار است:

$$C_c + C_s = T \quad (\text{پ ۶})$$

در این مرحله نیروها را از روابط (پ ۳)، (پ ۴) و (پ ۵) در رابطه (پ ۶) جای گذاری کرده، با قرار دادن  $E_s/E_c = n$ ، و حذف



شکل پ ۱: نمودار تنش، کرنش و نیروها در یک تیر بتن آرمه، در آغاز تسلیم فولاد کششی

از طرفین تساوی، معادله درجه دوم زیر بر حسب متغیر  $k$  نتیجه می‌شود:

$$k^2 + 2(\rho + \rho')nk - 2(\rho + \rho'd'/d)n = 0 \quad (\text{پ} ۷)$$

معادله (پ ۷) دارای یک ریشه حقیقی مثبت بوده که برابر است با:

$$k = \left[ (\rho + \rho')^2 n^2 + 2(\rho + \rho'd'/d)n \right]^{1/2} - (\rho + \rho')n \quad (\text{پ} ۸)$$

بدین ترتیب  $k$  نسبت عمق تار خنثی در شروع تسلیم فولاد کششی به عمق موثر، بر حسب  $\rho$  درصد فولاد کششی،  $\rho'$  درصد فولاد فشاری،  $d$  عمق موثر مقطع،  $d'$  فاصله مرکز فولاد فشاری از دورترین تار فشاری مقطع، و  $n$  نسبت مدول الاستیسیته فولاد به مدول الاستیسیته بتن به دست می‌آید.

# Parametric Study on Moment Redistribution in Continuous Beams in Concrete Bridges and a Comparison Between Iranian Concrete Code and ACI 318-02

*D. Mostofinejad, Associate Professor, Department of Civil Engineering, Isfahan Industrial University, Isfahan, Iran*

*F. Farahbod, Ph.D. Student, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran*

*E-mail: dmostofi@cc.iut.ac.ir*

## ABSTRACT

Experimental studies show that an indeterminate structure or a concrete continuous beam does not fail when critical sections reach their ultimate strengths. In other words, if a structure has adequate ductility, moment and stress redistribution will take place in the members by developing the plastic hinges at critical sections, while the other sections of the member achieve their ultimate strengths and capacities. Iranian concrete code allows for moment redistribution in terms of steel ratio of the beam section and limits it to 20 percent in critical regions. However ACI 318-02 defines the allowable moment redistribution in terms of net tensile strain in extreme tension steel ( $\varepsilon_t$ ) and limits it to 1000  $\varepsilon_t$  percent, but not more than 20%.

In the current study, the limitations of moment redistribution defined by Iranian concrete code, is discussed and a comparison is performed with ACI 318-02. To do so, governing equation of allowable moment redistribution is extracted, with regard to the required ductility in continuous beams. Afterwards, the effects of some different parameters, for instance, the magnitude of support elastic moment, the ratio of length to effective depth of continuous beam, and the strength of steel reinforcement, on the amount of moment redistribution are investigated and the results are compared with the limitations of ACI 318-02 and the Iranian concrete code. It is shown that the moment redistribution in reinforced concrete continuous beams based on the regulations of Iranian concrete code is not in a safe margin in some cases.

**Keywords:** Moment redistribution reinforced concrete, ductility demand, ductility capacity, elastic moment.