

# تأثیر ضعف‌های ساختاری در تحلیل شکست واژگونی خمشی<sup>۱</sup> شیروانی‌های سنگی (براساس تئوری مکانیک شکست<sup>۲</sup>)

عباس مجدی، استادیار، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران  
مهدی امینی، دانشجوی دکتری، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران  
E-mail: amini\_chermahini@yahoo.com

## چکیده

شکست واژگونی خمشی، در اثر تنش کششی ناشی از گشتاور وزن ستون‌سنگ‌های<sup>۳</sup> برجا، اتفاق می‌افتد. برای تحلیل این نوع شکست، هر ستون سنگ با یک تیر طره<sup>۴</sup> مدل سازی شده و فاکتور ایمنی شکست آن، بر اساس قوانین مقاومت مصالح، به دست می‌آید. هرچند نتایج این تحلیل‌ها با آزمون‌های آزمایشگاهی تطابق خوبی دارد، ولی کاربرد آنها در شیروانی‌های واقعی، فاکتور ایمنی شکست را بیش از واقعیت پیش‌بینی می‌کند. علت اصلی آن، تمرکز تنش در اطراف ضعف‌های ساختاری موجود در توده سنگ است. محاسبه میزان تمرکز تنش در اطراف ضعف‌های ساختاری با استفاده از قوانین مقاومت مصالح، بسیار دشوار و در شرایطی غیر ممکن بوده و تاکنون در تحلیل شکست واژگونی خمشی مد نظر قرار نگرفته است. در این مقاله، برای اولین بار، ضعف‌های ساختاری موجود در ستون‌سنگ‌های برجا که دارای پتانسیل شکست واژگونی خمشی هستند، تحلیل می‌گردند. در بحرانی‌ترین حالت، ضعف‌های ساختاری با یک "ترک لبه‌ای"<sup>۵</sup> عمود بر طول ستون سنگ مدل سازی می‌شوند. در این حالت بر اساس تئوری مکانیک شکست، هر ستون سنگ، نسبت به طول ترک، به صورت یک تیر با یک ستون دو سر بی نهایت عمل می‌کند. با در نظر گرفتن مفروضات بالا و با استفاده از معادلات تعادل حدی، نیروها و گشتاور نیروهای وارد بر مقطع در برگیرنده ترک محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از توابع تجربی "نادا" فاکتورهای "شدت تنش" نرمال ( $K_I$ ) و برشی ( $K_{II}$ ) برای ترک تعیین شده و بر اساس معیارهای "تئوری مکانیک شکست" فاکتور ایمنی شکست واژگونی خمشی در شیروانی سنگی محاسبه می‌شود. در پایان، نتایج این روش با روش تحلیلی مبتنی بر قوانین مقاومت مصالح و شیروانی‌های واقعی دارای پتانسیل شکست واژگونی خمشی مقایسه و درستی آن تایید می‌شود.

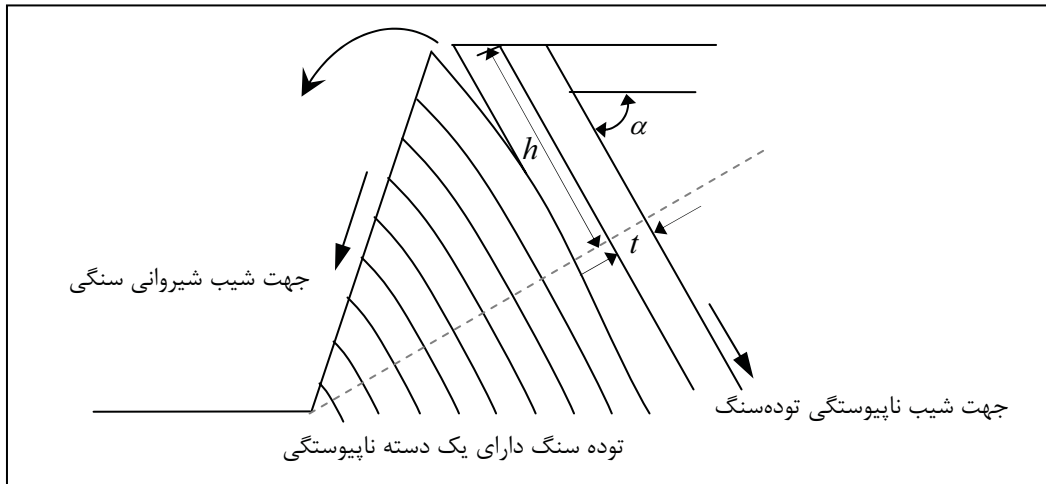
واژه‌های کلیدی: ضعف ساختاری، واژگونی خمشی، شیروانی سنگی، تئوری مکانیک شکست، ستون‌سنگ، مقاومت مصالح، ترک لبه‌ای، فاکتور شدت تنش

## ۱. مقدمه

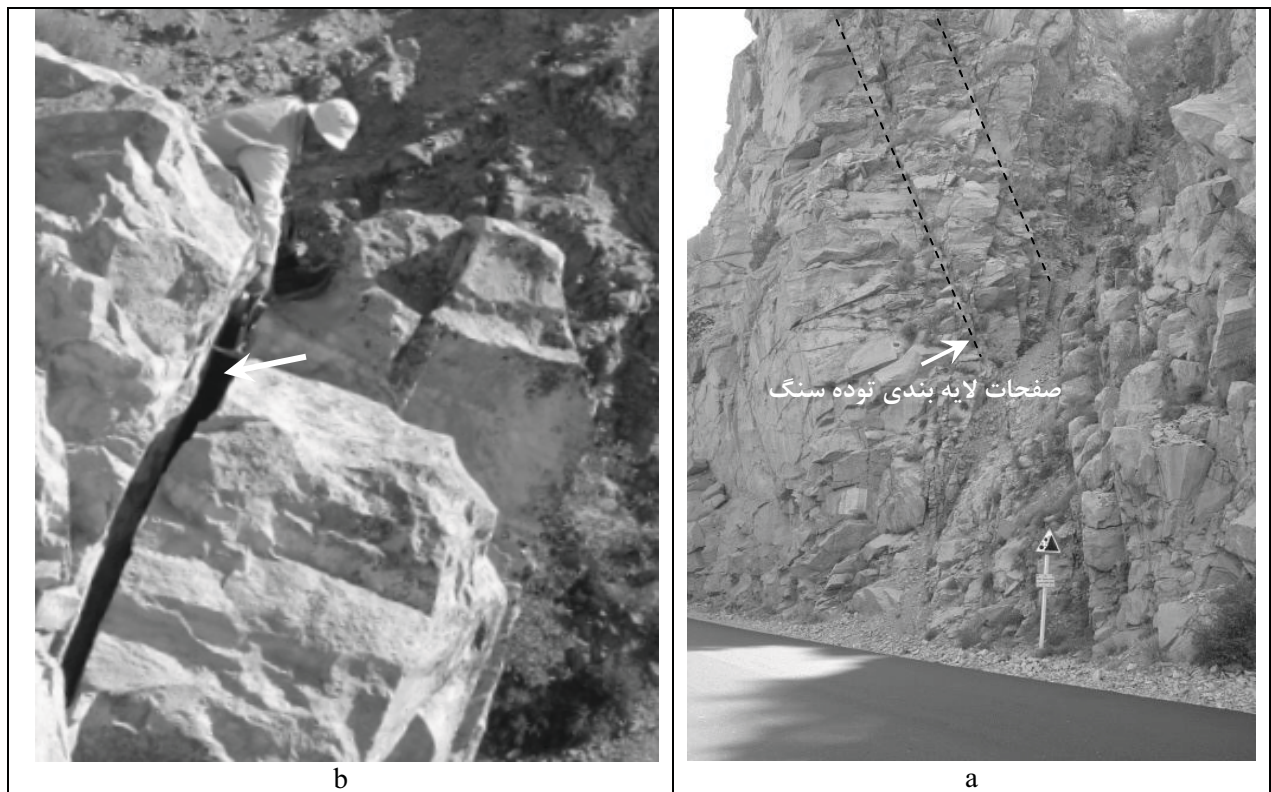
شکست واژگونی یکی از شکست‌های معمول در شیب‌های سنگی طبیعی و یا ترانشه‌ها است [1,2,3,4,5]. با توجه به سازوکار<sup>۶</sup> شکست و لغزش ستون‌سنگ‌ها، شکست واژگونی به چهار گروه خمشی، بلوکی، بلوکی - خمشی و واژگونی ثانویه تقسیم بندی

اگر نیروی وزن هرستون در دو جهت موازی و عمود بر صفحه دسته ناپیوستگی های توده سنگ تجزیه شود، مؤلفه عمودی باعث ایجاد گشتاور خمشی در پاشنه ستون می شود. گشتاور خمشی در یک طرف ستون سنگ تنش کششی و در طرف دیگر، تنش فشاری به وجود می آورد که تحت تاثیر تنش کششی، ستون سنگ می شکند و منجر به ناپایداری شیروانی می شود.

می شود [1]. شکست واژگونی خمشی در اثر تنش کششی ناشی از خمش ستون سنگها اتفاق می افتد. برای توصیف سازوکار این نوع شکست، چنین فرض می شود که در توده سنگ، تنها یک دسته ناپیوستگی با شیب تند وجود دارد که جهت شیب آنها در خلاف جهت شیب صفحه شیروانی قرار دارد (شکل های ۱ و ۲). در این حالت توده سنگ شبیه به ستون هایی عمل می کند که به صورت مایل و با شیب منفی روی هم قرار گرفته اند.



شکل ۱. شماتیک شکست واژگونی خمشی در شیروانی سنگی



شکل ۲. شکل ۲-الف) شیروانی سنگی دارای پتانسیل شکست واژگونی خمشی

ب- جدایش ستون سنگها در تاج شیروانی در اثر خمش ناشی از وزن (جاده تهران- فشم کیلومتر ۲۰ تا ۲۰+۵۰۰)

تند (بزرگتر از ۷۰ درجه) روی یکدیگر قرار داده و مدلی از یک شیروانی سنگی دارای پتانسیل شکست واژگونی خمشی ساختند. سپس مدل را طوری تحت فشار قرار دادند که در آن شکست واژگونی خمشی رخ دهد [8,5]. نتایج آزمون‌های مذکور تطابق خوبی با نتایج رابطه تحلیلی داشت.

در سال ۱۹۹۷، Adhikary و همکاران با شیوه‌ای جدیدتر، شکست واژگونی خمشی را مدل سازی آزمایشگاهی کردند [9]. این پژوهشگران، با استفاده از نمونه‌های آزمایشگاهی به ضخامت ۱۲-۸/۴ میلیمتر و طول ۴۰۰ تا ۱۰۰ میلیمتر یک شیروانی سنگی با پتانسیل شکست واژگونی خمشی ساختند. سپس این مدل را با استفاده از نیروی گریز از مرکز<sup>۸</sup> تحت فشار قرار دادند. این محققین با استفاده از نتایج آزمایشگاهی و محاسبات عددی<sup>۹</sup> تغییرات اندکی در رابطه تحلیلی Aydan و Kawamoto ایجاد کردند [9,10,11]. در مجموع، نتایج این آزمون‌ها با رابطه تحلیلی مبتنی بر مقاومت مصالح تطابق خوبی داشت [9].

همچنین Aydan و Kawamoto رابطه تحلیلی خود را در مورد شیروانی‌های واقعی دارای پتانسیل شکست واژگونی خمشی بکار برده و نتیجه حاصل را با وضعیت واقعی مقایسه کردند [5]. شکل ۴ نتیجه این مقایسه را نشان می‌دهد. حد تعادل که مبین مرز پایداری و ناپایداری است بر روی منحنی‌های تحلیلی قرار می‌گیرد، به گونه‌ای که هر منحنی (خطوط منقطع بالای نیمساز) معرف یک نسبت ارتفاع،  $h$ ، به ضخامت،  $t$ ، ستون سنگ‌هاست. این محققین در تفسیر شکل ۴ چنین بیان می‌کنند که چون در رسم منحنی‌های تئوری، مقدار بعضی از پارامترها به صورت فرضی در نظر گرفته شده‌است، این مقایسه صرفاً جنبه کیفی داشته و فقط روند کلی رابطه تئوری را تأیید می‌کند. یکی از این پارامترها، مقاومت کششی تک محوری سنگ بکر است که برابر با  $25 \text{ MPa}$  فرض شده است و حال آن که مقدار این پارامتر برای سنگ‌های مختلف بین ۲ تا  $30 \text{ MPa}$  تغییر می‌کند [7,12,13,14]. اگر در رابطه تئوری مبتنی بر قوانین مقاومت مصالح (روش Aydan و Kawamoto) مقدار مقاومت کششی سنگ برابر با  $2 \text{ MPa}$  (حداقل مقاومت کششی سنگها) قرار داده شود، بسیاری از نقاط ناپایدار واقعی (علامت ●)، در منطقه پایدار تئوری فوق قرار می‌گیرند، یعنی رابطه تحلیلی مبتنی بر قوانین مقاومت مصالح، فاکتور ایمنی شکست را بیش از واقعیت پیش بینی می‌کند. دلیل اصلی عدم تطابق نتایج تحلیلی با واقعیت، وجود ریز درزه‌ها و یا ریزترک‌ها در ساختار ستون سنگ‌های

اولین پژوهش‌های کاربردی انجام شده در مورد شکست واژگونی توسط Goodman و Bray در سال ۱۹۷۶ انجام شد [1]. این محققین چنین فرض کردند که در این نوع شکست، نخست لایه‌ها روی هم لغزیده و سپس در اثر خمش می‌شکنند (شکل ۳). بر این اساس و با استفاده از معادلات تعادل حدی، رابطه (۱) به عنوان شرط لازم برای شکست واژگونی خمشی در شیروانی‌ها پیشنهاد شد [1,7]:

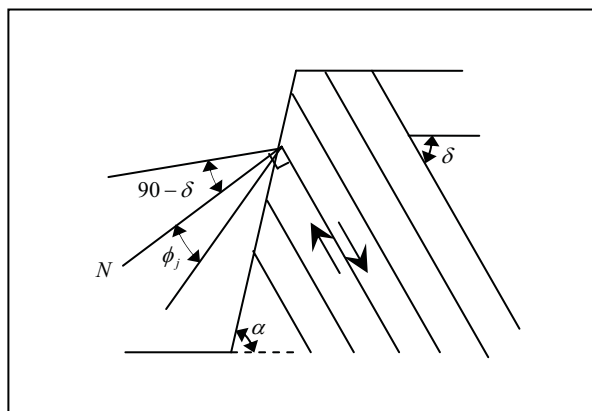
$$(90 - \delta) + \phi_j < \alpha \quad (1)$$

که در آن:

$\alpha$  = زاویه شیب شیروانی سنگی نسبت به افق

$\phi_j$  = زاویه اصطکاک داخلی ناپیوستگی‌های توده‌سنگ (زاویه مقاومت برشی)

$\delta$  = زاویه شیب ناپیوستگی‌های توده‌سنگ نسبت به افق (شکل ۳)

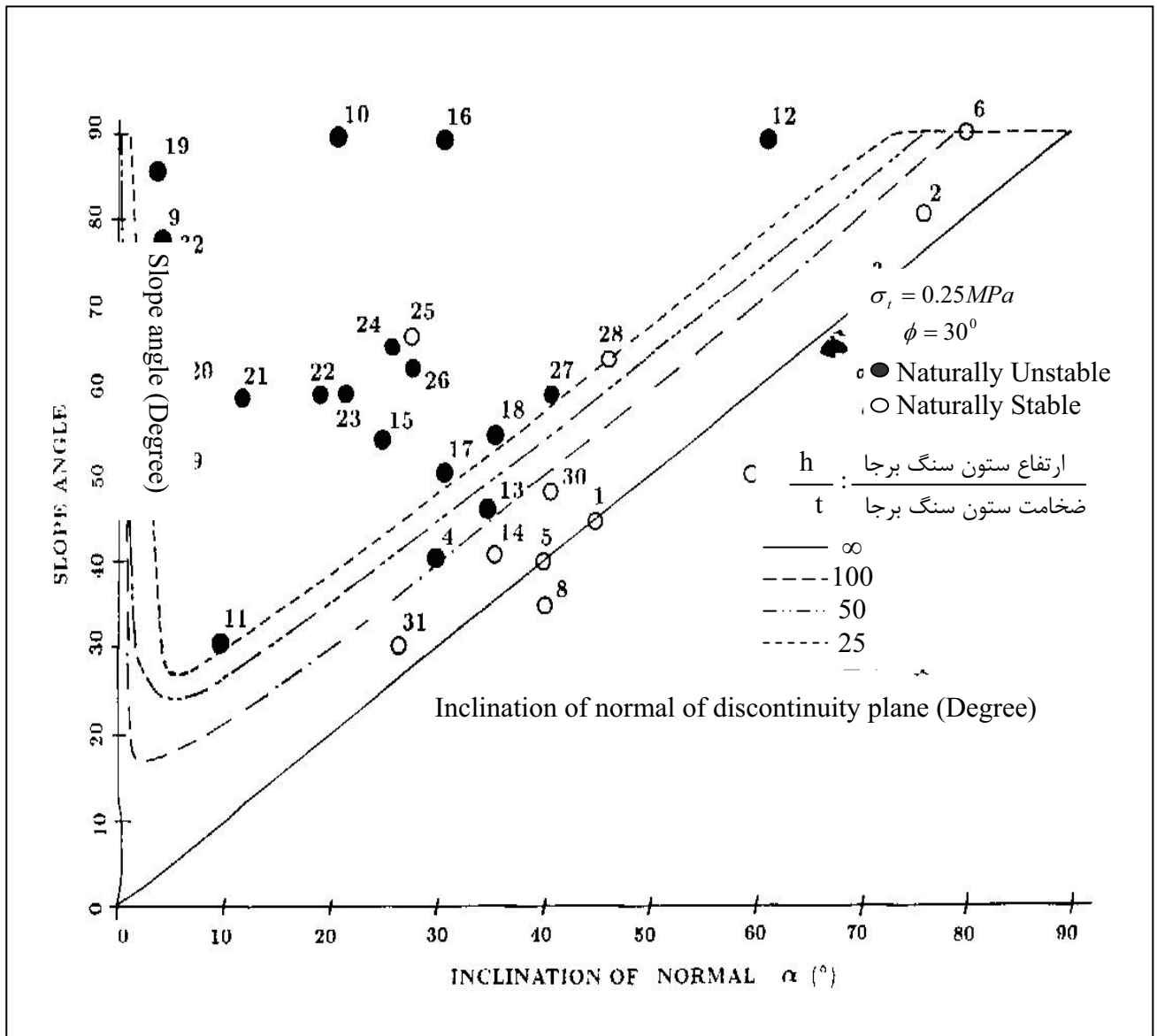


شکل ۳. مکانیزم شکست واژگونی خمشی بر اساس نظر Goodman و Bray [7].

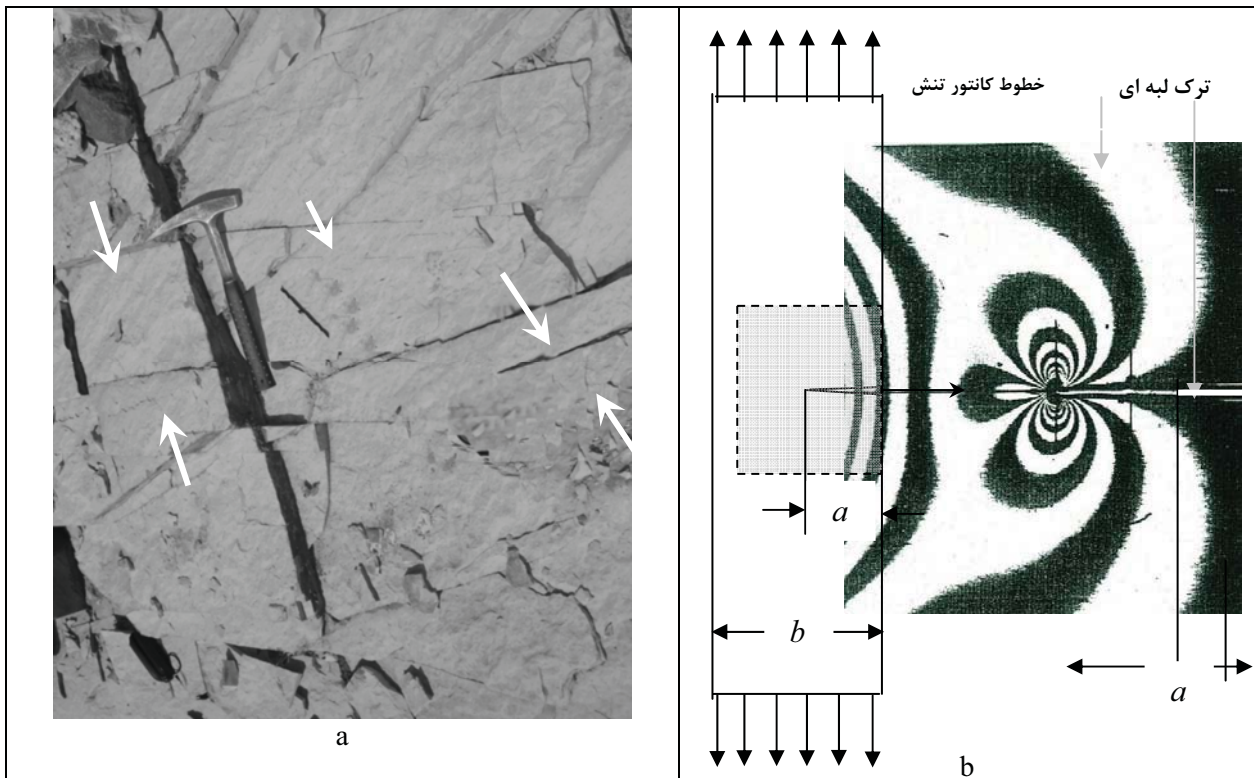
در سال ۱۹۸۷، Aydan و Kawamoto سطح کلی شکست واژگونی خمشی را عمود بر صفحه ناپیوستگی‌های توده سنگ فرض کردند. با این فرض، هر ستون را با یک تیر طره بدون ضعف ساختاری مدل سازی و با استفاده از معادلات تعادل حدی و قوانین مقاومت مصالح، رابطه‌ای برای محاسبه فاکتور ایمنی شکست واژگونی خمشی پیشنهاد کردند [1]. این محققین در سال ۱۹۹۲، نتایج حاصل از رابطه خود را با مدل سازی‌های آزمایشگاهی مقایسه و رابطه اولیه را اصلاح و تکمیل کردند [9]. در مدل سازی‌های آزمایشگاهی، نمونه‌هایی از سنگ بکر<sup>۷</sup> به ضخامت ۳۰-۲۵ میلیمتر و طول ۳۵۰-۱۵۰ میلیمتر را با زاویه

و پرهزینه است، ارایه روشی آسان تر که ضعف‌های ساختاری موجود در آنها را جهت تحلیل در نظر گرفته و نیاز به آزمون‌های درجا نداشته باشد، حائز اهمیت است. در این مقاله برای نخستین بار، بر اساس تئوری مکانیک شکست، رابطه‌ای ارایه شده است که با استفاده از آن می‌توان فاکتور ایمنی شکست واژگونی خمشی را با در نظر گرفتن ضعف‌های ساختاری موجود در ستون‌سنگ‌های طبیعی محاسبه کرد.

برجاست که در تئوری فوق در نظر گرفته نشده است (شکل ۵-الف). این ترک‌ها به دلیل ایجاد تمرکز تنش فاکتور ایمنی شکست را کاهش می‌دهند [15] (شکل ۵-ب). بنابراین اگر در رابطه Kawamoto و Aydan به جای مقاومت کششی تک محوری سنگ بکر، مقاومت کششی درجای ستون‌سنگ قرار داده شود، نتایج، تطابق بهتری با واقعیت خواهند داشت. با توجه به این که اندازه‌گیری مقاومت کششی بر جای ستون‌سنگ‌ها بسیار دشوار



شکل ۴. مقایسه نتایج رابطه تحلیلی مبتنی بر مقاومت مصالح (روش Kawamoto و Aydan) با مثال‌های واقعی شیروانی‌های سنگی [4].



شکل ۵- الف) ضعف‌های ساختاری موجود در ستون سنگ‌ها (شیروانی مشرف به جاده تهران - فشم ۲۰ تا ۲۰+۵۰۰)،  
ب-ب) تمرکز تنش در اطراف ضعف ساختاری موجود در یک ستون (تصویر فتوالاستیک)

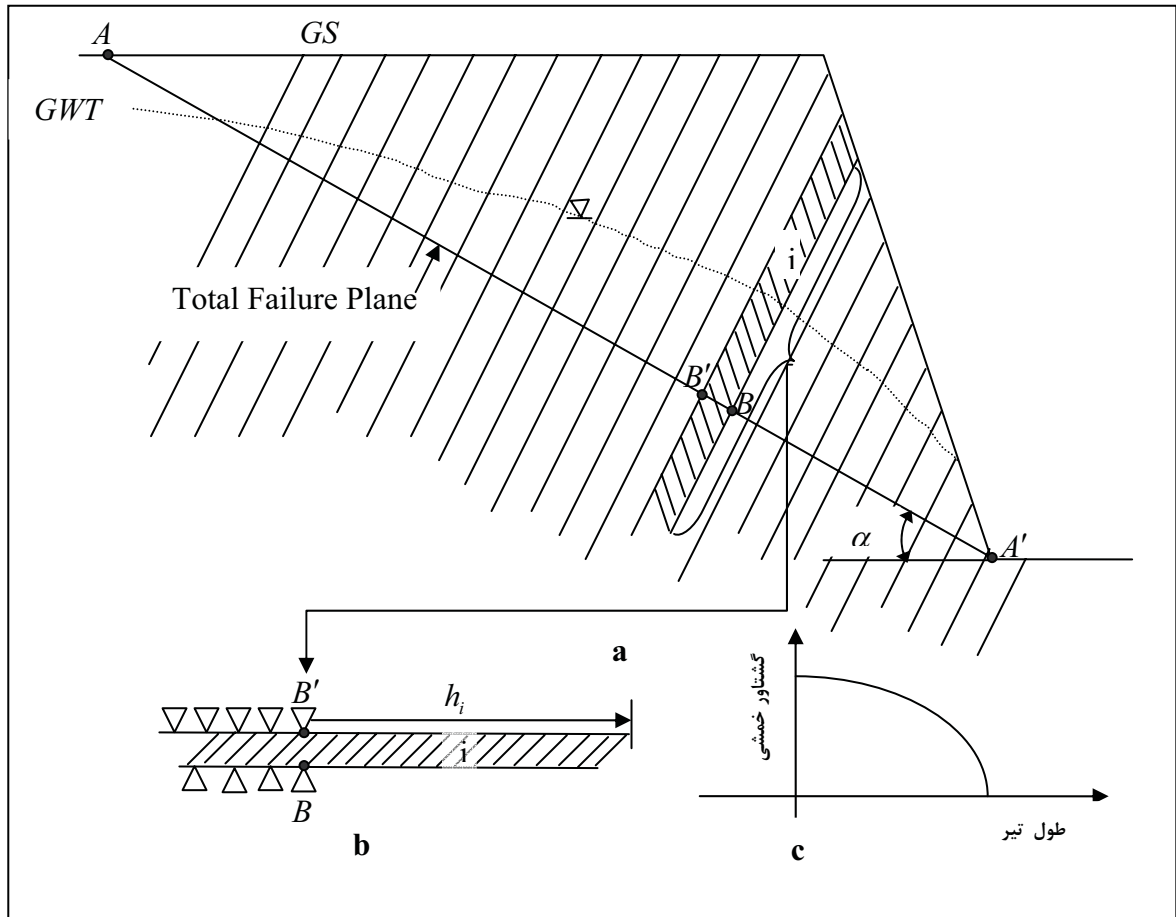
ضعف ساختاری در بحرانی‌ترین بخش ستون در نظر گرفته شود. با توجه به بیشینه گشتاور خمشی داخل ستون (شکل ۶-ج)، صفحه  $B - B'$  را می‌توان به عنوان بحرانی‌ترین مقطع برای ضعف ساختاری فرض کرد. بنابراین چنین فرض می‌شود که در این بخش از ستون، یک ترک به عنوان مدلی از ضعف ساختاری وجود دارد. به منظور محاسبه حداقل فاکتور ایمنی شکست ستون، این ترک در لبه بالایی ستون یعنی محل تنش کششی حداکثر قرار داده می‌شود (شکل‌های ۷-الف و ۷-ب).

با توجه به اینکه طول ستون سنگ نسبت به طول ترک بسیار زیاد است، ستون با یک "ترک لبه‌ای" را می‌توان با یک تیر دو سر بی‌نهایت مدل‌سازی کرد (شکل ۷-ج). حال اگر این تیر تحت تأثیر گشتاور خمشی و تنش‌های برشی و نرمال واقع شود، مسلماً در نوک ترک تمرکز تنش ایجاد می‌شود، به طوری که افزایش آن باعث توسعه ترک شده و در نهایت موجب شکست تیر می‌شود (شکل ۵-ب).

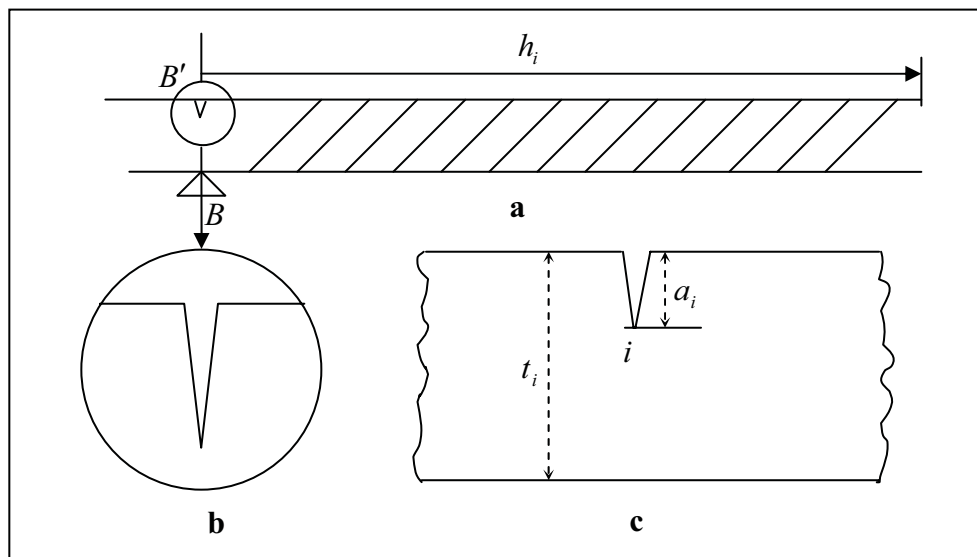
بر این اساس برای محاسبه شکست ستون سنگ‌ها در برابر شکست واژگونی خمشی، محاسبه فاکتور ایمنی مدل (شکل ۷-ج)، تطابق بیشتری با واقعیت دارد.

## ۲. محاسبه فاکتور ایمنی شکست واژگونی خمشی با در نظر گرفتن ضعف‌های ساختاری موجود در ستون سنگ‌های طبیعی

شکل ۶ به صورت شماتیک یک شیروانی سنگی دارای شکست واژگونی خمشی را نشان می‌دهد. همان گونه که اشاره شد، ستون سنگ‌ها در اثر یکی از مولفه‌های نیروی وزن خود، تحت گشتاور خمشی قرار می‌گیرند. گشتاور خمشی، بخشی از مقطع عرضی ستون را تحت کشش قرار می‌دهد. اگر صفحه  $A - A'$  از پاشنه شیب (نقطه  $A'$ )، عمود بر صفحات ناپیوستگی‌های توده سنگ رسم شود، محل تلاقی صفحه  $A - A'$  و صفحات دسته ناپیوستگی‌های توده سنگ (نقاط  $B$  و  $B'$ ) مانند یک تکیه‌گاه ثابت برای ستون سنگ  $i$ ، عمل می‌کند (شکل ۶-ب). در نمودار گشتاور خمشی تیر (شکل ۶-ج)، بیشینه گشتاور در مقطع  $B - B'$  واقع می‌شود. بنابراین صفحه  $A - A'$  صفحه کلی شکست شیروانی سنگی تحت شکست واژگونی خمشی است. اگر ستون سنگ شکل ۶-ب دارای ضعف‌های ساختاری باشد، برای تحلیل و محاسبه بیشینه مقاومت کششی آن در برابر شکست، لازم است



شکل ۶- الف صفحه شکست کل واژگونی خمشی، ب) مدل ستون سنگ (تیر طره)، ج) نمودار گشتاور خمشی وارد بر مدل



شکل ۷. مدل ستون سنگ دارای ضعف ساختاری

برای تحلیل و محاسبه فاکتور ایمنی شکست مدل شکل ۷-ج،

$$T_i, T_{i-1} = \text{نیروهای برشی بین ستون‌سنگ‌ها و به ترتیب برابر با}$$

$$\mu \cdot P_i, \mu \cdot P_{i-1}$$

فاصله نقطه اثر نیروهای  $U_i, U_{i-1}$  از تکیه‌گاه

$x_i, x_{i-1}$  = فاصله نقطه اثر نیروهای  $P_i, P_{i-1}$  از تکیه‌گاه

گشتاور خمشی،  $M_i$ ، عامل تنش کششی، نیروی فشاری،  $N_i$ ،

عامل تنش فشاری و نیروی برشی،  $V_i$ ، باعث تنش برشی در

صفحه شکست  $B-B'$  می‌شوند و ترکیب آنها تنشهای نهایی را

در نقاط مختلف تیر مشخص می‌کند. نوک ترک به علت تمرکز

تنش و واقع شدن در منطقه کشش، نقطه شروع شکست است..

بنابراین اگر مقدار تنش کششی در این نقطه با مقاومت کششی

مقایسه شود، مقدار فاکتور ایمنی شکست تیر به دست می‌آید.

از نظر تئوری، مقدار تنش کششی در نوک ترک بی نهایت است

[۱۶ و ۱۷] که طبعاً از نظر فیزیکی امکان‌پذیر نیست [۱۷، ۱۸ و ۱۹].

بنابراین از اصل فوق نمی‌توان برای تعیین فاکتور ایمنی شکست

مدل شکل ۷-ج استفاده کرد.

بر اساس تئوری "مکانیک شکست"، مقدار تنش در نقطه‌ای

نزدیک به نوک ترک با استفاده از فاکتوری به نام فاکتور شدت

تنش  $(SIF)^{11}$  بررسی می‌شود. این فاکتور برای حالت‌های کششی

و فشاری با  $K_I$  و برای حالت برشی (با توجه به جهت برش) با

$K_{II}$  و  $K_{III}$  نمایش داده می‌شود.

نخست گشتاور خمشی،  $M_i$ ، نیروی نرمال،  $N_i$  و نیروی برشی،

$V_i$ ، وارد بر صفحه شکست (صفحه ترک) به دست می‌آید. شکل

۸ نیروهای وارد بر ستون سنگ  $i$  را نشان می‌دهد. با استفاده از

معادلات تعادل حدی، مقادیر  $M_i, N_i$  و  $V_i$  به صورت روابط

زیر حاصل می‌شوند:

$$M_i = W_i \cdot \text{Sin} \alpha \cdot (0.5h_i) + P_i \cdot x_i - P_{i-1} \cdot x_{i-1} - (T_i + T_{i-1}) \cdot (0.5t_i) + U_i \cdot l_i - U_{i-1} \cdot l_{i-1} + U_{bi} \cdot l_{bi} \quad (2)$$

$$N_i = W_i \cdot \text{Cos} \alpha + T_i - T_{i-1} \quad (3)$$

$$V_i = -W_i \cdot \text{Sin} \alpha + P_{i-1} - P_i - U_i + U_{i-1} \quad (4)$$

پارامترهای بکار رفته در این روابط عبارتند از:

$W_i$  = وزن ستون سنگ

$\alpha$  = زاویه بین صفحه عمود بر ناپیوستگی و افق

$\mu$  = ضریب اصطکاک بین ستون‌سنگها

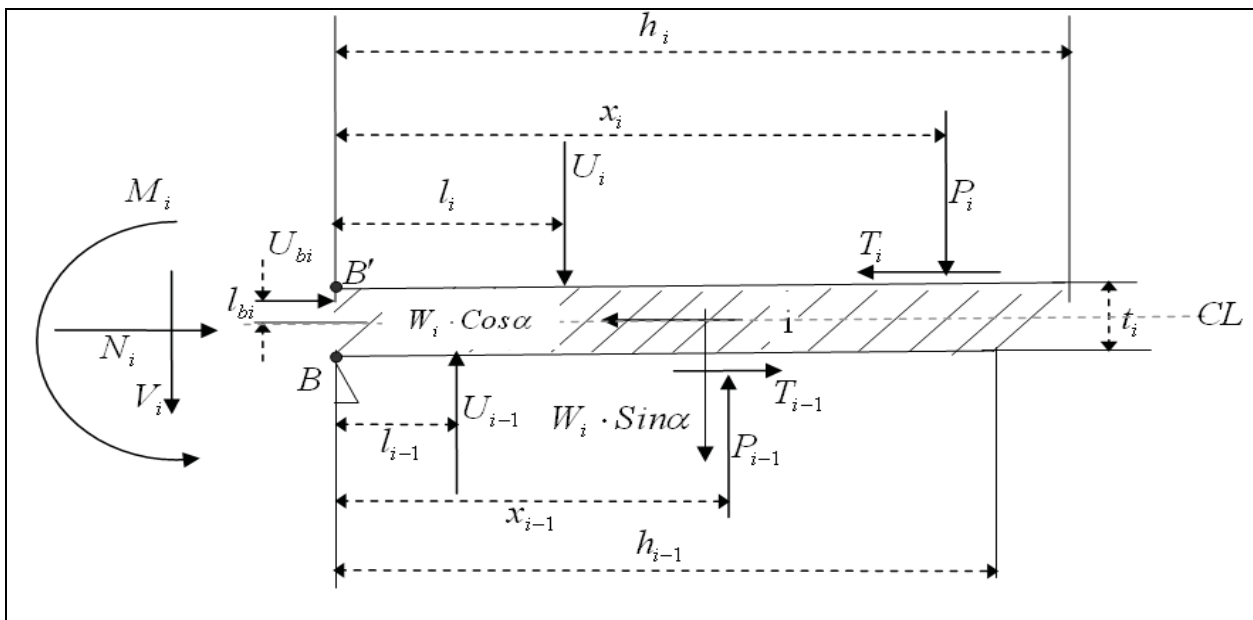
$U_{bi}$  = فشار آب حفره‌ای در قاعده ستون سنگ

$t_i$  = عرض ستون سنگ

$h_i, h_{i-1}$  = طول طرفین ستون سنگ

$U_i, U_{i-1}$  = نیروی فشار آب در دو طرف ستون سنگ

$P_i, P_{i-1}$  = نیروهای نرمال بین ستون‌سنگ‌ها



شکل ۸. نمودار آزاد<sup>۱۱</sup> نیروها و گشتاور نیروهای وارد بر یک ستون سنگ دلخواه  $i$

$$\left\{ K_{II}^i = \frac{2V_i}{\sqrt{\pi a_i}} \cdot F_{II} \left( \frac{a_i}{t_i} \right) \right. \quad (7)$$

در روابط (7)،  $K_{II}^i$  فاکتور شدت تنش ناشی از نیروی برشی است.

از آنجا که "ترک لبه‌ای" معرف ضعف ساختاری ستون سنگ است، اگر طول ترک بسیار کوچکتر از ضخامت ستون سنگ فرض شود (با توجه به ضخامت معلوم ستون سنگ، مشاهدات، اندازه‌گیری‌ها و دید مهندسی)، توابع  $F_1$  و  $F_2$ ، در روابط به ترتیب 5 و 6، به دو عدد ثابت زیر تبدیل می‌شوند [20]:

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{\frac{a_i}{t_i} \rightarrow 0} F_1 \left( \frac{a_i}{t_i} \right) &= 1.122 \\ \frac{a_i}{t_i} &\rightarrow 0 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{\frac{a_i}{t_i} \rightarrow 0} F_2 \left( \frac{a_i}{t_i} \right) &= 1.122 \\ \frac{a_i}{t_i} &\rightarrow 0 \end{aligned} \right. \quad (9)$$

چون مسئله شیب‌های سنگی (بجز در بعضی از قسمت‌های خاص مانند سر پیچ‌ها) کرنش صفحه‌ای است [21]، مقدار  $K_{III}$  در این تحلیل تأثیر نداشته و در محاسبات وارد نمی‌شود. در محدوده الاستیک خطی، با استفاده از اصل "جمع آثار"، مقدار فاکتور شدت تنش نرمال کل برای مدل شکل 9-الف به صورت رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\left\{ \begin{aligned} K_I^i &= K_I^{1i} + K_I^{2i} \\ F_{II} \left( \frac{a_i}{t_i} \right) &= \frac{1.3 - 0.65 \left( \frac{a_i}{t_i} \right) + 0.37 \left( \frac{a_i}{t_i} \right)^2 + 0.28 \left( \frac{a_i}{t_i} \right)^3}{\sqrt{1 - \left( \frac{a_i}{t_i} \right)}} \end{aligned} \right. \quad (10)$$

در شرایطی که فاکتور شدت تنش کل (ناشی از تنش برشی، گشتاور خمشی و تنش فشاری) برای ترک محاسبه شود، می‌توان در مقام مقایسه با "فاکتور شدت تنش در لحظه شکست"، فاکتور ایمنی شکست را به دست آورد. برای تحلیل ستون سنگ و محاسبه "فاکتور شدت تنش کل" در نوک "ترک لبه‌ای" (شکل 9-الف)، سه حالت زیر در نظر گرفته می‌شود:

1- هنگامی مدل تحت گشتاور خمشی محض  $M_i$  قرار داشته باشد (شکل 9-ب).

در این حالت "فاکتور شدت تنش کششی" ناشی از گشتاور خمشی، بر اساس "تابع تجربی تادا"، به صورت زیر به دست می‌آید [20].

$$\left\{ \begin{aligned} K_I^{1i} &= \frac{6M_i}{t_i^2} \cdot \sqrt{\pi a_i} \cdot F_1 \left( \frac{a_i}{t_i} \right) \\ F_1 \left( \frac{a_i}{t_i} \right) &= \sqrt{\frac{2t_i \cdot \tan \frac{\pi a_i}{2t_i}}{\pi a_i}} \cdot \frac{0.923 + 0.199 \cdot \left( 1 - \sin \frac{\pi a_i}{2t_i} \right)^4}{\cos \frac{\pi a_i}{2t_i}} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

در روابط (5)،  $K_I^{1i}$  فاکتور شدت تنش نرمال ناشی از گشتاور خمشی و  $a_i$  طول ترک است.

2- زمانی که مدل تحت تأثیر تنش فشاری محض حاصل از  $N_i$  واقع شود (شکل 9-ج).

در این حالت فاکتور شدت تنش با استفاده از "تابع تجربی تادا" به صورت زیر تعیین می‌شود [20]:

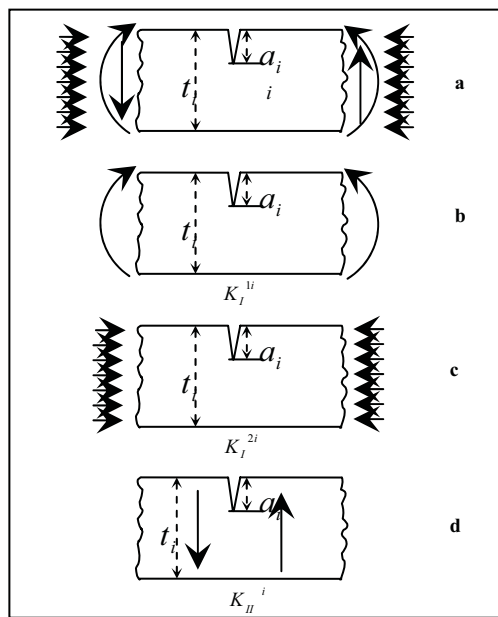
$$\left\{ \begin{aligned} K_I^{2i} &= -\frac{N_i}{t_i} \cdot \sqrt{\pi a_i} \cdot F_2 \left( \frac{a_i}{t_i} \right) \\ F_2 \left( \frac{a_i}{t_i} \right) &= \sqrt{\frac{2t_i \cdot \tan \frac{\pi a_i}{2t_i}}{\pi a_i}} \cdot \frac{0.752 + 2.02 \left( \frac{a_i}{t_i} \right) + 0.37 \left( 1 - \sin \frac{\pi a_i}{2t_i} \right)}{\cos \frac{\pi a_i}{2t_i}} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

در روابط (6)،  $K_I^{2i}$  فاکتور شدت تنش نرمال ناشی از تنش فشاری است.

3- زمانی که مدل تحت تأثیر تنش برشی محض ناشی از  $V_i$  قرار داشته باشد (شکل 9-د).

در این حالت با استفاده از "تابع تجربی تادا" مقدار فاکتور شدت تنش برشی به صورت زیر حاصل می‌شود [20]:





شکل ۹. تحلیل مدل ستون سنگ دارای ضعف ساختاری با اصل "جمع‌آثار" (a = b + c + d)

برای تحلیل یک شیروانی خاص در برابر شکست واژگونی خمشی با استفاده از رابطه ۱۳، نخست صفحه  $A-A'$  (شکل ۶) رسم می‌شود. سپس ستون‌سنگ‌ها از پاشنه شیب تا آخرین ستون دارای پتانسیل شکست شماره‌گذاری می‌شوند. حال مقادیر  $x_i$  و  $x_{i-1}$  (یعنی محل اثر نیروهای بین دو ستون) به ترتیب با  $0.55h_i$  و  $0.55h_{i-1}$  [5] و پارامتر  $F_s$  با مقدار فاکتور ایمنی مجاز، جایگزین می‌شوند.

سایر پارامترها نیز بر اساس هندسه شیروانی، خصوصیات ژئومکانیکی توده‌سنگ و سطح آب زیرزمینی انتخاب می‌شوند. اکنون برای آخرین ستون (ستون شماره  $n$ ) رابطه ۱۳ بکار برده شده و با جایگذاری  $P_n = 0$  مقدار  $P_{n-1}$  محاسبه می‌شود. همین عمل با معلوم بودن  $P_{n-1}$  برای ستون  $n-1$  تکرار شده و مقدار  $P_{n-2}$  به دست می‌آید. این عملیات تا ستون شماره ۱ ادامه یافته تا مقدار  $P_0$  بدست آید. با داشتن مقدار  $P_0$  می‌توان در مورد شکست واژگونی خمشی در شیروانی به صورت زیر تصمیم‌گیری کرد:

- ۱- اگر  $P_0 = 0$  باشد، فاکتور ایمنی شکست شیب برابر با فاکتور ایمنی مجاز است.
- ۲- اگر  $P_0 > 0$  باشد، فاکتور ایمنی شکست شیب کمتر از فاکتور ایمنی مجاز است.

برای محاسبه فاکتور ایمنی، لازم است یکی از معیارهای<sup>۱۵</sup> مجاز تئوری مکانیک شکست در سنگ استفاده شود. اکثر مراجع، معیار شکست  $S(\theta)_{min}$  (را برای سنگ توصیه می‌کنند [19,12,17]). با توجه به این که شکست واژگونی خمشی تحت تاثیر تنش کششی غالب اتفاق می‌افتد، می‌توان از تأثیر فاکتور شدت تنش برشی ( $K_{II}$ ) در این نوع شکست، چشم‌پوشی کرد [5]. بنابراین معیار شکست  $S(\theta)_{min}$  (به رابطه ساده زیر تبدیل می‌شود:

$$F_s = \frac{K_I^i}{K_{IC}} \quad (11)$$

با جایگذاری رابطه ۱۰ در رابطه ۱۱ و جانشین کردن مقادیر "فاکتورهای شدت تنش" از روابط ۵-الف و ۶-الف، مقدار فاکتور ایمنی شکست ستون سنگ  $i$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_s = \frac{1}{K_{IC}} \cdot \left[ \frac{6M_i}{t_i^2} \cdot \sqrt{\pi a_i} \cdot F_1\left(\frac{a_i}{t_i}\right) - \frac{N_i}{t_i} \cdot \sqrt{\pi a_i} \cdot F_2\left(\frac{a_i}{t_i}\right) \right] \quad (12)$$

اگر مقادیر  $M_i$  و  $N_i$  از روابط ۲ و ۳ در رابطه ۱۲ جایگزین شوند، بعد از انجام عملیات جبری، مقدار  $P_{i-1}$  با استفاده از رابطه ۱۳ قابل محاسبه است:

$$P_{i-1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{Max}(P_i, 0)[x_i - 0.5\mu \cdot t_i] + W_i \cdot \text{Sin } \alpha \cdot 0.5h_i + U_i \cdot l_i - U_{i-1} \cdot l_{i-1} - U_{hi} \cdot l_{hi}}{(x_{i-1} + 0.5\mu \cdot t_i)} \\ \frac{F_s \cdot K_{IC} \cdot t_i^2 + \sqrt{\pi a_i} \cdot F_2 \cdot t_i \cdot W_i \cdot \text{Cos } \alpha}{6\sqrt{\pi a_i} \cdot F_1 \cdot (x_{i-1} + 0.5\mu \cdot t_i)} \end{array} \right.$$

برای تحلیل شکست این ستون سنگ تحت گشتاور خمشی، دو حالت زیر مورد بررسی قرار گرفته است:

حالت ۱- هنگامی که هیچ ضعف ساختاری در ستون سنگ وجود نداشته باشد.

حالت ۲- زمانی که در ستون سنگ ضعف ساختاری موجود باشد. در حالت اول با کاربرد رابطه مبتنی بر مقاومت مصالح (روش Aydan و Kawamoto) برای ستون سنگ مذکور، شیب معادل شیروانی،  $\psi$ ، در لحظه شکست به صورت رابطه ۱۴ به دست می آید [5]:

(۱۴)

$$\psi = \text{Arc tan} \left( \frac{\sigma_t}{L \cdot \gamma} \cdot \frac{1}{3 \frac{h}{t} \cdot \text{Sin } \alpha - \text{Cos } \alpha} \right) + \alpha$$

(بر پایه مقاومت مصالح)

در حالت دوم، در این تحقیق، ضعف ساختاری موجود در ستون سنگ با یک "ترک لبه‌ای" به طول  $a$  ( $0 < a < t$ ) و در محل  $B$  جایگزین شده و با جانشینی پارامترهای ستون سنگ در رابطه ۱۳ و انجام عملیات جبری لازم، رابطه زیر برای محاسبه شیب معادل شیروانی،  $\psi$ ، در لحظه شکست حاصل می شود:

(۱۵)

$$\psi = \text{Arc tan} \left( \frac{K_{IC}}{L \cdot \gamma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}} \cdot \frac{1}{3 \frac{h}{t} \cdot F_1 \cdot \text{Sin } \alpha - F_2 \cdot \text{Cos } \alpha} \right) + \alpha$$

(بر پایه مکانیک شکست)

مختصات ( $\psi$  نسبت به  $\alpha$ ) رسم شده‌اند (شکل ۱۱). از شکل ۱۱ نکات زیر قابل استنتاج است:

۱- روند کلی نتایج حاصل از مقاومت مصالح (منحنی ۷) و تئوری مکانیک شکست (منحنی‌های ۱ تا ۶ و ۸) با یکدیگر تطابق کامل دارد.

۲- افزایش طول ترک،  $a$ ، موجب کاهش زاویه معادل شیروانی،  $\psi$ ، در لحظه شکست شده، در صورتی که کاهش طول ترک،  $a$ ، باعث ازدیاد می شود.

۳- اگر طول ترک،  $a$ ، تقریباً برابر با ضخامت ستون سنگ،  $t$ ، شود، زاویه معادل شیروانی،  $\psi$ ، در لحظه شکست با زاویه شیب گوه صلب نسبت به افق،  $\alpha$ ، برابر می شود (منحنی ۱). یعنی مقاومت کششی ستون برابر صفر است.

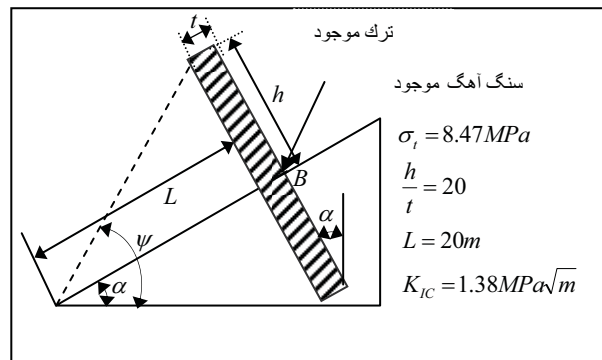
۳- اگر  $P_0 < 0$  باشد، فاکتور ایمنی شکست شیب بیشتر از فاکتور ایمنی مجاز است.

در حالات ۲ و ۳، پارامتر  $F_p$  با مقدار جدیدی (برای حالت ۲ کوچکتر از فاکتور ایمنی مجاز و برای حالت ۳ بزرگ تر از فاکتور ایمنی مجاز) جایگزین و محاسبات تکرار می شوند. این روند تا جایی ادامه می یابد که تفاضل ۲ فاکتور ایمنی مفروض متوالی کمتر از خطای دلخواه شود. در این حالت، آخرین فاکتور ایمنی مفروض برابر با فاکتور ایمنی پایداری شیروانی سنگی در برابر شکست واژگونی خمشی در نظر گرفته می شود.

### ۳. مقایسه نتایج رابطه ارایه شده با رابطه تحلیلی

#### مبتنی بر مقاومت مصالح

برای آن که تشابهات و تفاوت‌های بین رابطه ارایه شده در این مقاله (رابطه ۱۳) و رابطه تحلیلی مبتنی بر مقاومت مصالح (رابطه Aydan و Kawamoto) بهتر و واضح تر نشان داده شوند، هر دو رابطه فقط برای یک ستون سنگ دارای پتانسیل شکست واژگونی خمشی اعمال شده و نتایج آنها با هم مقایسه شدند. به این منظور، مطابق شکل ۱۰، یک ستون سنگ به ضخامت  $t$  و ارتفاع  $2h$  و وزن مخصوص  $\gamma$  را در نظر بگیرید که تحت زاویه  $\alpha$  نسبت به قائم در یک گوه صلب فرورفته باشد. زاویه  $\psi$  به نام زاویه معادل شیروانی نامگذاری می شود. همان گونه که در این مقاله بیان شد، این ستون سنگ در اثر یکی از مؤلفه‌های نیروی وزن خود تحت گشتاور خمشی قرار دارد، به طوری که صفحه  $B-B'$  محل شکست احتمالی آن است.



شکل ۱۰. مدل مقایسه‌ای ستون سنگ دارای پتانسیل

#### شکست واژگونی خمشی

برای ارزیابی بهتر، خواص مقاومتی این ستون سنگ معادل خواص آهک سفید<sup>۱۱</sup> فرض شده [12] و روابط ۱۴ و ۱۵ در یک دستگاه

تئوری مکانیک شکست (رابطه ۱۳)، برای محاسبه فاکتور ایمنی شیروانی سنگی استفاده شود.

– اگر  $a \leq a_c$  باشد، رابطه بر پایه تئوری مکانیک شکست (با جایگذاری  $a = a_c$ ) و رابطه مبتنی بر قوانین مقاومت مصالح نتایج یکسان ارایه می‌کنند.

همان گونه که دیده می‌شود رابطه مبتنی بر مقاومت مصالح (روش Aydan و Kawamoto) فقط برای حالتی صادق است که طول ترک‌های موجود در ستون سنگ کوچکتر یا مساوی حد بحرانی باشد، در صورتی که رابطه برپایه قوانین مکانیک شکست برای همه شرایط صادق است.

در نتیجه می‌توان گفت که رابطه ارایه شده در این مقاله، یک رابطه جامع تر نسبت به رابطه تحلیلی مبتنی بر مقاومت مصالح است. به عبارت دیگر رابطه تحلیلی مبتنی بر مقاومت مصالح موجود، یک حالت خاص از رابطه ارایه شده در این مقاله است.

همچنین با توجه به این که شرایط لازم برای تحلیل پایداری ستون سنگ‌های برج، اکثراً بر شرط  $a > a_c$  منطبق است، رابطه مبتنی بر مقاومت مصالح را نمی‌توان برای شیب‌های واقعی استفاده کرد زیرا نتایج حاصل با واقعیت سازگار نخواهند بود.

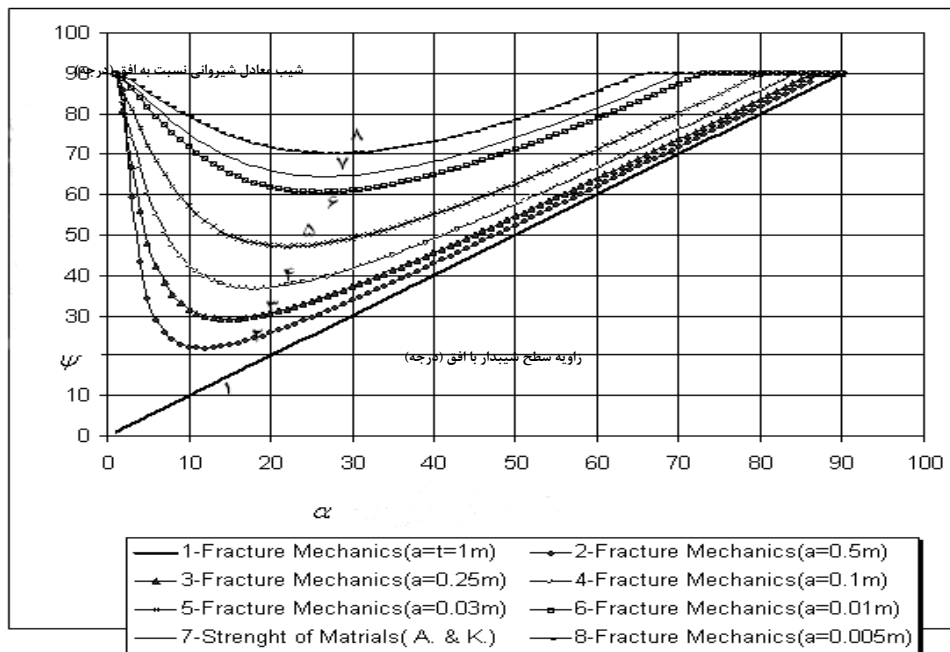
در صورتی که روش ارایه شده در این مقاله را می‌توان برای همه حالات، به ویژه برای حالتی که  $a > a_c$  باشد بکار برد، زیرا نتایج حاصل به واقعیت نزدیک ترند.

۴- اگر طول ترک از یک حد بحرانی کوچک تر شود، زاویه معادل شیروانی،  $\psi$ ، در لحظه شکست براساس قوانین مقاومت مصالح (منحنی ۷) (روش Aydan و Kawamoto) کمتر از زاویه معادل شیروانی بر پایه تئوری مکانیک شکست می‌شود (منحنی ۸). چون مبنای محاسبه فاکتور ایمنی در دو روش مذکور متفاوت است، در این حالت با وجود محاسبه نکردن تأثیر ریز درزه‌ها در رابطه مبتنی بر مقاومت مصالح، فاکتور ایمنی محاسبه شده در این روش کمتر از مقداری است که از روش مبتنی بر مکانیک شکست حاصل می‌شود. برای تعیین طول بحرانی ترک،  $a_c$ ، میتوان روابط ۱۴ و ۱۵ را مساوی هم قرار داده و طول ترک را به دست آورد. در این حالت، با توجه به اینکه طول ترک بسیار کوچک است، مقادیر  $F_1$  و  $F_2$ ، به ترتیب از روابط ۸ و ۹، با مقدار ثابت ۱/۱۲۲ جایگزین و مقدار  $a_c$  از رابطه ساده (۱۶) محاسبه می‌شود:

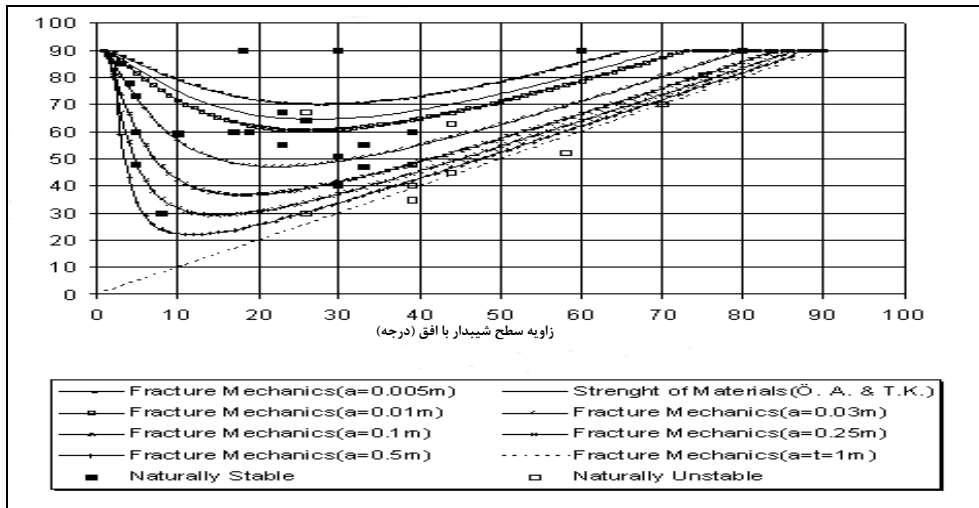
$$a_c = \left( \frac{K_{IC}}{2\sigma_t} \right) \quad (16)$$

به عنوان مثال، برای سنگ آهک سفید، طول ترک بحرانی بر اساس رابطه ۱۶، ۷ میلی‌متر به دست می‌آید.

بنابراین، اگر  $a > a_c$  باشد، رابطه مبتنی بر قوانین مقاومت مصالح (منحنی ۷) فاکتور ایمنی شیروانی سنگی را بیش از واقعیت پیش بینی می‌کند. در این حالت لازم است با توجه به طول ترک‌های موجود در ستون‌سنگ‌های برج، از رابطه بر اساس



شکل ۱۱. مقایسه شیب معادل شیروانی در لحظه شکست بر اساس قوانین مقاومت مصالح (روش Aydan و Kawamoto) و نیز بر پایه تئوری مکانیک شکست (ارایه شده در این مقاله)



شکل ۱۲. مقایسه نتایج حاصل از روابط مبتنی بر مکانیک شکست، مقاومت مصالح با مثال‌های واقعی

۲. کاربرد این روش‌ها در تحلیل شیروانی‌های سنگی، فاکتور ایمنی شکست را بیش از واقعیت نشان می‌دهد که خود میزان ایمنی را کاهش می‌دهد.
۳. ناسازگاری نتایج روش‌های تحلیلی مذکور با واقعیت، به دلیل ضعف‌های ساختاری موجود در ستون سنگ‌های برجاست که موجب کاهش شدید مقاومت کششی آنها می‌شود.
۴. در شکست واژگونی خمشی، ضعف‌های ساختاری را می‌توان با یک "ترک لبه‌ای" عمود بر ضخامت ستون و در محل شکست مدل سازی کرد.
۵. وجود ترک در ستون سنگ، موجب تمرکز تنش در نوک ترک می‌شود که مقاومت نهایی ستون را در برابر خمش کاهش می‌دهد.
۶. فاکتور ایمنی شکست ستون سنگ با یک "ترک لبه‌ای" را نمی‌توان بر اساس قوانین مقاومت مصالح محاسبه کرد، در صورتی که با استفاده از رابطه ارایه شده در این مقاله که مبتنی بر قوانین مکانیک شکست است، فاکتور ایمنی قابل محاسبه است.
۷. برای یک توده سنگ مشخص با استفاده از رابطه ۱۶ طول ترک بحرانی قابل محاسبه است.
۸. چون مبنای محاسبه فاکتور ایمنی در روش‌های مبتنی بر مقاومت مصالح و مکانیک شکست متفاوت است، در حالتی که طول ترک‌های موجود در ستون‌سنگها کوچکتر از حد

#### ۴. مقایسه نتایج روابط ارایه شده در این مقاله با

##### مثال‌های واقعی

شکل ۱۲ نتایج واقعی شکست واژگونی خمشی را در شیروانی‌های سنگی به همراه منحنی‌های تئوری حاصل از رابطه ارایه شده در این مقاله، نشان می‌دهد. بر خلاف ارزیابی Aydan و Kawamoto (شکل ۴) در این مقایسه برای رسم منحنی‌های نظری از پارامترهای مقاومتی واقعی استفاده شده است. هرچند در این مقایسه، امکان دسترسی به خصوصیات شیروانی‌های سنگی وجود نداشت، ولی همان گونه که از شکل ۱۲ پیداست، با توجه به طول ترک موجود در ستون سنگ‌ها، منحنی‌های تئوری، تمامی نقاط واقعی را پوشش می‌دهند و تطابق خوبی با واقعیت دارند. برای مقایسه بهتر، منحنی حاصل از رابطه Aydan و Kawamoto (با پارامترهای واقعی) نیز در شکل ۱۲ رسم شده است.

##### ۵. نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از این پژوهش را می‌توان به صورت نکات کلیدی زیر بیان کرد:

۱. روش‌هایی که تا کنون برای تحلیل شکست واژگونی خمشی ارایه شده‌اند، همگی بر پایه قوانین مقاومت مصالح قرار دارند که هر ستون سنگ را با یک تیر طره با مواد هموزن مدلسازی کرده‌اند.

۱۱. با توجه به شکننده بودن ستون‌سنگ‌ها، طول ترک‌های طبیعی موجود در آنها، اکثراً بیش از حد بحرانی است. بنابراین در شیروانی‌های واقعی، استفاده از رابطه مبتنی بر مکانیک شکست اعتبار بیشتری نسبت به رابطه مبتنی بر مقاومت مصالح دارد.
۱۲. هیچ یک از پارامترهای موجود در روابط حاصل از تئوری مکانیک شکست نیاز به انجام آزمون‌های برجا ندارد، در صورتی که در روش مبتنی بر مقاومت مصالح چنین نیست.
۱۳. نتایج به دست آمده از روش مبتنی بر تئوری مکانیک شکست سازگاری بیشتری با واقعیت دارد.
- بحرانی شود، با وجود محاسبه نکردن تأثیر ریز درزه‌ها در رابطه مبتنی بر مقاومت مصالح، فاکتور ایمنی محاسبه شده در این روش کمتر از مقداری است که از روش مبتنی بر مکانیک شکست حاصل می‌شود.
۹. اگر به جای پارامتر  $a$  (طول ترک)،  $a_c$  (طول ترک بحرانی) در رابطه ۱۳ جایگزین شود، روابط مبتنی بر مکانیک شکست و مقاومت مصالح جواب یکسان ارایه می‌کنند.
۱۰. بررسی مقایسه‌ای انجام شده در این پژوهش نشانگر این حقیقت است که رابطه Aydan و Kawamoto یک حالت خاص از رابطه ارایه شده در این مقاله است.

## ۷- مراجع

8. Kawamoto, T., Obara, Y. and Ichikawa, Y. (1983) "A base friction apparatus and mechanical properties of model material", Journal of Mineral Metallurgy Institute of Japan, No.99, pp.1-6.
9. Adhikary, D. P., Dyskin, A. V., Jewell, R. J. and D. P. Stewart (1997) "A study of the mechanism of flexural toppling failure of rock slopes", Rock Mechanics and Rock Engineering, Vol.30, No.2, pp.75-93.
10. Adhikary, D. P., Dyskin, A. V. and Jewell, R. J. (1996) "Numerical modeling of the flexural deformation of foliated rock slopes" International J. Rock Mech. Min. Sci. and Min. Abstr. Vol.33, No.6, pp. 595-606.
11. Jewell, R. J., Stone, K. J. L. and Adhikary, D. P. (1992) "Modeling of stability of rock slopes", Western Australian Conference on Mining Aeromechanics, Kalogeria, W.A., pp. 255-261.
12. Whittaker, B.N., Singh R. N. and Sun, G. (1992) "Rock fracture mechanics, principles, design and applications", Elsevier, Netherlands.
13. Vutukuri, V.S., Lama, R.D. and Saluja, S.S. (1974) "Handbook on mechanical properties of rock, volume I, Clausthal, Trans Tech Publication.
14. Smoltezyk, U. (2002) "Geotechnical engineering handbook" Vol. 1, Ernst & Sohn Publication.
1. Goodman, R. E. and Bray, J. W. (1976) "Toppling of rock slopes", ASCE Specialty Conference on Rock Engineering for Foundations and Slopes, Boulder Colorado, Vol. 2, pp. 201-234.
2. Ishida, T., Chigira, M. and Hibino, S. (1987) "Application of the distinct element method for analysis of toppling observed on a fissured slope", Rock Mech. Rock Engineering, Vol.20 No.4, pp. 277-283.
3. Sijing, W. (1981) "On the mechanism and process of slope deformation in an open pit mine", Rock Mechanics, Vol.14, No.3, pp. 145-156.
4. Aydan, O., Kawamoto, T. (1987) "Toppling failure of discontinuous rock slopes and their stabilization", Journal of Mineral Metallurgy . Institute of Japan, Vol.103, pp.763-770.
5. Aydan, O., Kawamoto, T. (1992) "Stability of slopes and underground openings against flexural toppling and their stabilization", Rock Mechanics and Rock Engineering, Vol. 25, No.4, pp.143-165.
6. De Freitas, M. H. and Watters, R. J. (1973) "Some field examples of toppling failure", Geotechnique, Vol.23, No.4, pp.495-514.
7. Goodman R. E. (1998) "Introduction to rock mechanics", John Wily & Sons.

19. Da'an, Wang Sijing (1994) "Investigation of true mixed mode fracture criterion of rock and its application in analyzing slope stability", Proceedings of Conference of Chinese Young Scientists of Geotechnical Engineering Mechanics. China Science and Technology Press.
20. Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G. R. (2003) "The Stress analysis of cracks handbook", Paris Productions.
21. Yang, H.H. (1983) "Stability analysis of earth slope".
15. Maji, A.K., Wang, J.L. (1992) "Experimental study of fracture process in rock, Rock Mech. Rock Engineering, 25 (1).
16. Sanford, R.G. (2003) "Principle of fracture mechanics, Pearson Education, U. S. A.
17. Atkinson, B.K. (1987) "Fracture mechanics of rock". London, Academic Press.
18. Yiaochong, Yu (1991) "Fracture mechanics of rock and concrete" Central South University Press.

### پانویس ها

1. Flexural toppling
2. Fracture mechanics
3. Rock column
4. Cantilever beam
5. Single-ended crack
6. Mechanism
7. Intact rock
8. Centrifuge
9. Numerical methods
10. Single-ended crack
11. Free body diagram
12. Stress intensity factor
13. Critical stress intensity factor (Fracture toughness)
14. Superposition
15. Failure criteria
16. White limestone

# Effect of Structural Defects on the Analysis of Flexural Toppling Failure of Rock Slopes (Based on Fracture Mechanics)

*A. Majdi, Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran,*

*M. Amini, Ph.D. Student, Department of Civil Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran*

*E-mail: amini\_chermahini@yahoo.com*

## ABSTRACT

Flexural toppling failure occurs due to tensile stress caused by in-situ rock column moments. Observations and theoretical analyses carried out by researchers show that the total failure plane is perpendicular to the rock mass discontinuity plane. In this paper, to analyze the flexural toppling failure, each rock column is modeled as a cantilever beam. Then using the laws of the strength of materials, along with the limit of equilibrium, the safety factor is found. Although the result of this analysis is comparable with those of laboratory tests, their use in real slopes shows a safety factor more than what it has to be. This is due to stress concentration around and near the tips of structural defects in the rock mass. Calculation of the amount of stress concentration around structural defects, based on the laws of the strength of materials, is cumbersome and has not been observed in the analysis of flexural toppling failure. In this paper, for the first time, structural defects of in-situ rock columns, with a potential of flexural toppling failure, enter the analysis. In nature, structural defects in rock masses appear haphazardly and unevenly in different locations. However, due to brittleness of the rocks, the rock defects generally appear in the form of ended cracks. Keeping this in mind, to analyze rock columns with structural defects, we considered a single ended crack perpendicular to the column length resulting total failure. Hence, in this case, based on the theory of fracture mechanics, each rock column, with respect to the length of the crack, acts like a beam with two infinite ends. With the above presumptions and employing the equations of limit of equilibrium, we can find the forces and moments acting on the section involving the crack are found as follows:

(1)

$$M_i = W_i \cdot \sin \alpha \cdot (0.5h_i) + P_i \cdot x_i - P_{i-1} \cdot x_{i-1} - (T_i + T_{i-1}) \cdot (0.5t_i) + U_i \cdot l_i - U_{i-1} \cdot l_{i-1} + U_{bi} \cdot l_{bi}$$

$$N_i = W_i \cdot \cos \alpha + T_i - T_{i-1} \quad (2)$$

$$V_i = -W_i \cdot \sin \alpha + P_{i-1} - P_i - U_i + U_{i-1} \quad (3)$$

Where:

$W_i$ : Rock column weight.

$\alpha$ : The angle between the rock slope and the horizontal plane

$\mu$ : Rock inter-column coefficient of friction.

$U_{bi}$ : Pore water pressure at the base of the rock column.

$t_i$ : Rock column width.

$h_i, h_{i-1}$ : Side length of the rock column.

$U_i, U_{i-1}$ : Water pressure force at each side of the rock column.

$P_i, P_{i-1}$ : Rock inter-column normal forces.

$T_i, T_{i-1}$ : Rock inter-column shear forces (equal to  $\mu \cdot P_i, \mu \cdot P_{i-1}$  respectively).

$l_i, l_{i-1}$ : Distance between force points  $U_i, U_{i-1}$  and the support.

$x_i, x_{i-1}$ : Distance between force points  $P_i, P_{i-1}$  and the support.

Bending moment, compressive and shear forces cause, respectively, tensile, compressive, and shear stresses on the plane involving the crack, and their combined action produces the stress intensity around the structural defect of in-situ rock columns. Using empirical TADA functions, the ‘‘Stress Intensity Factor’’, related to the above stress field is defined as follows:

$$K_I^{1i} = \frac{6M_i}{t_i^2} \cdot \sqrt{\pi a_i} \cdot F_1\left(\frac{a_i}{t_i}\right) \quad (4-a)$$

$$F_1\left(\frac{a_i}{t_i}\right) = \sqrt{\frac{2t_i}{\pi a_i} \cdot \tan \frac{\pi a_i}{2t_i}} \cdot \frac{0.923 + 0.199 \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi a_i}{2t_i}\right)^4}{\cos \frac{\pi a_i}{2t_i}} \quad (4-b)$$

$$K_I^{2i} = -\frac{N_i}{t_i} \cdot \sqrt{\pi a_i} \cdot F_2\left(\frac{a_i}{t_i}\right) \quad (5-a)$$

$$F_2\left(\frac{a_i}{t_i}\right) = \sqrt{\frac{2t_i}{\pi a_i} \cdot \tan \frac{\pi a_i}{2t_i}} \cdot \frac{0.752 + 2.02 \left(\frac{a_i}{t_i}\right) + 0.37 \left(1 - \sin \frac{\pi a_i}{2t_i}\right)}{\cos \frac{\pi a_i}{2t_i}} \quad (5-b)$$

$$K_{II}^i = \frac{2V_i}{\sqrt{\pi a_i}} \cdot F_{II}\left(\frac{a_i}{t_i}\right) \quad (6-a)$$

$$F_{II}\left(\frac{a_i}{t_i}\right) = \frac{1.3 - 0.65 \left(\frac{a_i}{t_i}\right) + 0.37 \left(\frac{a_i}{t_i}\right)^2 + 0.28 \left(\frac{a_i}{t_i}\right)^3}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_i}{t_i}\right)}} \quad (6-b)$$

Where;

$K_I^{1i}$ : Normal stress intensity factor caused by the bending moment.

$K_I^{2i}$ : Normal stress intensity factor caused by the compressive force.

$K_{II}^i$ : Shear stress intensity factor caused by the shear force.

$a_i$ : Length of the crack.

Since the factor of safety against failure is:

$$F_s = \frac{K_I^{1i} + K_I^{2i}}{K_{IC}} \quad (7)$$

if equations 1 to 6 are substituted into equation 7, then the rock inter-column normal force is computed as follows:



$$P_{i-1} = \frac{\text{Max}(P_i, 0)[x_i - 0.5\mu \cdot t_i] + W_i \cdot \text{Sin } \alpha \cdot 0.5h_i + U_i \cdot l_i - U_{i-1} \cdot l_{i-1} - U_{bi} \cdot l_{bi}}{(x_{i-1} + 0.5\mu \cdot t_i)} \quad (8)$$

$$\frac{F_s \cdot K_{IC} \cdot t_i^2 + \sqrt{\pi a_i} \cdot F_2 \cdot t_i \cdot W_i \cdot \text{Cos } \alpha}{6\sqrt{\pi a_i} \cdot F_1 \cdot (x_{i-1} + 0.5\mu \cdot t_i)}$$

To analyze a given slope against flexural toppling failure by using equation 8, first we should draw the total failure plane. Then rock columns are numbered, from the toe of the slope to the last column that has a potential to failure. Next, we substitute  $0.55h_i$  and  $0.55h_{i-1}$  for  $x_i$  and  $x_{i-1}$  (the force points between two columns) respectively, along with a prescribed factor of safety  $F_s$ . Other related parameters, including the slope geometry, geomechanical properties of the rock mass and the ground water level are also taken into account. Now we apply equation 8 for the last column (column n) to calculate  $P_{n-1}$  by letting  $P_n = 0$ . Repeating the calculations, knowing  $P_{n-1}$  for column  $n-1$ , we can compute  $P_{n-2}$  and, finally for the first column, we can determine the value of  $P_0$ . Knowing  $P_0$  we can decide about the flexural toppling failure with the following conditions:

If  $P_0 = 0$ , safety factor of the slope is equal to the allowable safety factor.

If  $P_0 > 0$ , safety factor of the slope is less than the allowable safety factor.

If  $P_0 < 0$ , safety factor of the slope is more than the allowable safety factor.

In cases 2 and 3  $F_s$  is substituted with a new value (in case 2 less than the allowable safety factor and in case 3 more) and the calculations are repeated. This process continues until the difference between two given consecutive safety factors becomes less than the acceptable error. In this case, the last assumed safety factor is considered equal to the factor of safety of the rock slope stability against flexural toppling failure.

**Keywords:** Rock slopes, fracture mechanics, flexural toppling failure, bending moment