

## بهینه‌سازی مدل استوار سه‌هدفه برای مسئله مکان‌یابی - مسیریابی کمان‌محور

### مقاله علمی - پژوهشی

عاطفه کهنی، دانش آموخته دکتری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران  
سیدمحمد سیدحسینی، استاد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران  
رضا توکلی‌مقدم\*، استاد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

\*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: tavakoli@ut.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۰۸ - پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۰۱

صفحه ۹۸-۸۳

### چکیده

در مسائل مکان‌یابی-مسیریابی کمان‌محور برخلاف مسائل مکان‌یابی-مسیریابی شناخته‌شده، تقاضا بر روی کمان قرار دارد و برای برآورده شدن تقاضای مشتریان استفاده از کمان‌های بدون تقاضا مجاز است. مطالعات محدودی بر روی این مسئله تمرکز داشته‌اند. در این تحقیق یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی مختلط سه‌هدفه برای مسئله مکان‌یابی-مسیریابی کمان‌محور چنددوره‌ای تحت شرایط عدم قطعیت ارائه می‌شود. اهداف مدل از نوع کمینه‌سازی هزینه، کمینه‌سازی مقدار ماده حمل‌شونده در مدت‌زمان حمل و کمینه‌سازی زمان انتظار وسیله نقلیه تعریف شده است. رعایت پنجره زمانی، حداقل‌سازی مقدار ماده حمل‌شونده در مدت‌زمان حمل و کنترل میزان ریسک مسیرهای مورد استفاده در یک حد آستانه‌ای بر اساس شاخص‌های امنیتی، ریسک جابجایی را نیز به طور غیرمستقیم کاهش می‌دهد. مدل پیشنهادی با استفاده از مدل برتسیماس و سیم استوار شده و از روش E-محدودیت برای حل ۲۲ مسئله استاندارد بر مبنای مدل پیشنهادی استفاده شده است. برای اعتبارسنجی مدل استوار نیز از مدل واقع‌نمایی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل استوار در سطوح محافظه‌کاری بالاتر در مقابل مدل قطعی دارای عملکرد بهتری است و افزایش میزان عدم قطعیت در هر سطح از محافظه‌کاری منجر به افزایش هزینه‌ها می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مکان‌یابی-مسیریابی کمان‌محور سه‌هدفه، بهینه‌سازی استوار، روش E-محدودیت، پنجره زمانی، ریسک

### ۱- مقدمه

تقسیم نمود. مسئله فروشنده دوره‌گرد<sup>۳</sup> (TSP) و مسئله مسیریابی وسیله نقلیه<sup>۴</sup> (VRP) از نوع گره‌محور و مسئله پستی چینی<sup>۵</sup> (CPP) و مسئله پستی روستایی<sup>۶</sup> (RPP) از نوع کمان‌محور هستند. اکثر تحقیقاتی موجود بر روی مسائل دسته گره‌محور تمرکز داشته‌اند. اما مسائل کمان‌محور نیز به دلیل کاربردهای خاصی که در مسائل نگهداری و برف‌روبی جاده‌ها، مسائل جمع‌آوری زباله و تحویل محموله پستی دارد، دارای اهمیت هستند. مسئله مسیریابی کمان‌محور ظرفیت‌دار<sup>۷</sup> (CARP) توسعه‌ای از مسئله پستی روستایی<sup>۶</sup> (RPP) است که در آن به‌جای یک وسیله نقلیه از چند وسیله نقلیه استفاده می‌شود و برای

مسئله مکان‌یابی - مسیریابی شاخه‌ای از مسئله مکان‌یابی است که به جنبه‌های مسیریابی نیز توجه دارد. اگرچه ایده اولیه پرداختن به این دو مسئله به صورت هم‌زمان از سال ۱۹۶۱ شروع شده و تاکنون تحقیقات زیادی بر روی این مسئله انجام شده است، اما شکاف‌های تحقیقاتی زیادی (Albareda-Sambola 2015) در این زمینه وجود دارد که نشان‌دهنده ظرفیت این مسئله در انجام تحقیقات جدید است. مسائل مسیریابی را می‌توان روی یک گراف شامل تعدادی گره و یال (اتصال بین گره‌ها) تعریف کرد که تقاضا بر روی گره یا یال‌ها وجود دارد. در صورتی که تقاضا بر روی گره یا یال قرار داشته‌باشد مسائل گره‌محور<sup>۱</sup> و مسائل کمان‌محور<sup>۲</sup>

دارد. البته این مدل LARP زمانی که مشتریان به اندازه‌ای به یکدیگر نزدیک هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت پیوسته (روی یک کمان) در نظر گرفت، نیز کاربرد دارد. با توجه به عدم قطعیت تقاضا در مدل پیشنهادی از روش برتسیماس و سیم برای مقابله با عدم قطعیت داده‌ها استفاده شده است. جهت اعتبارسنجی مدل پیشنهادی از روش E-محدودیت برای حل ۲۲ مسئله استاندارد استفاده شده است. برای اعتبارسنجی مدل استوار نیز از مدل واقع‌نمایی استفاده شده است. همچنین جهت اعتبارسنجی روش برتسیماس مورد استفاده نتایج سناریوهای مختلف از جمله سناریو خوش‌بینانه و بدبینانه برای مدل با یکدیگر مقایسه شده است. ادامه مقاله به این صورت سازمان یافته است که در بخش ۲ تاریخچه مهم‌ترین کارهای مرتبط با مسائل LARP، CARP، مدل‌سازی پنجره زمانی و محاسبه مقدار ماده حمل‌شونده در مسائل کمان‌محور ارائه شده است. همچنین مروری بر روش‌های بهینه‌سازی استوار انجام گرفته است.

## ۲- پیشینه تحقیق

در این بخش به طور مختصر تاریخچه مسائل کمان‌محور و روش‌های بهینه‌سازی استوار مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به محدود بودن مسائل مرتبط با LARP در این بخش ابتدا انواع مسائل و کاربردهای مسئله CARP بیان شده است (جدول ۱). تمامی این مدل‌ها با افزودن مفهوم مکان‌یابی قابل‌تعمیم به مدل LARP است. اولین تحقیق کاربردی برای مسئله LARP در اداره پست آمریکا انجام شده و از روش مکان‌یابی-تخصیص-مسیریابی برای حل مدل استفاده شده است (Levy and Bodin, 1989). در این روش مکان انبارها تعیین، کمان‌های موردنیاز به برخی از خوشه‌ها تخصیص داده شده و در نهایت درون هر خوشه یک مسئله مسیریابی حل می‌شود. روش دیگری نیز به نام تخصیص-مسیریابی-مکانیابی برای حل این مسئله وجود دارد که در آن ابتدا خوشه‌بندی و مسیریابی انجام شده و سپس، مکان انبارهای مرکزی بر مبنای مسیرهای ساخته شده تعیین می‌شود (Ghani and Laporte, 2001). مطالعات محدودی به مسئله LARP پرداخته شده است.

اولین بار توسط گلدن و وانگ معرفی شد (Albareda-Sambola, 2015). مسئله مسیریابی کمان‌محور انواع مختلف و کاربردهای گسترده‌ای دارد، مسئله مکان‌یابی-مسیریابی کمان‌محور<sup>۹</sup> (LARP) نیز توسعه‌ای از مسئله CARP است. این مسئله به صورت یک گراف  $G = (V, E \cup A)$  که  $V$  مجموعه گره‌ها،  $E$  مجموعه یال‌ها و  $A$  مجموعه کمان‌ها، تعریف شده است که می‌تواند جهت‌دار، بدون جهت یا ترکیبی از این حالت‌ها باشد. هدف مسئله LARP یافتن هم‌زمان الف) مسیر بهینه وسایل نقلیه برای سرویس‌دهی به کمان‌ها/ یال‌های<sup>۱۰</sup> دارای تقاضا با استفاده از حداقل تعداد کمان بدون تقاضا<sup>۱۱</sup> و ب) مکان بهینه انبارها از بین گره‌های کاندید است. از کاربردهای این مسئله استفاده در مسائل کمان‌محور ذاتی یا گره‌محور با گره‌های نزدیک نام برد (Albareda-Sambola, 2015). مسئله برف‌روبی جاده‌ها از نوع اول و مسئله جمع‌آوری زباله از نوع دوم است. با وجود کاربردی بودن این مسئله، مطالعات محدودی در این حوزه انجام شده است که در اکثر موارد نیز برای حل مسائلی که به صورت ذاتی کمان‌محور هستند به کار گرفته شده است (Kahfi, Seyyedhosseni, and Tavakkoli-Moghaddam, 2017).

در این مطالعات محدود، مدل برنامه‌ریزی ریاضی با محدودیت‌های پایه ارائه و هیچ‌کدام با یک روش دقیق حل و اعتبارسنجی نشده است. به عنوان مثال، محدودیت‌های تعریف شده در مدل (Lopes et al., 2014) منجر به اختصاص یک وسیله نقلیه به هر مشتری می‌شود که در شرایط واقعی امکان‌پذیر نیست. همچنین، مدل پیشنهادی (Huber, 2016) تنها شامل دو تابع با مدل‌سازی ریاضی است و محدودیت‌ها مدل نشده است. در این تحقیق یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی مختلط برای مسئله LARP سه‌هدفه چنددوره‌ای در شرایط عدم قطعیت ارائه شده است. اهداف مدل پیشنهادی کمینه‌سازی هزینه، کمینه‌سازی مقدار کالای حمل‌شونده در مدت زمان و کمینه‌سازی زمان انتظار وسیله نقلیه تعریف شده است. مدل LARP پایه پیشنهادی در این مقاله برای مسائلی که با شبکه جاده‌ای مرتبط است، مانند برف‌روبی جاده‌ها و بازرسی لوله‌گاز کاربرد دارد. مدل توسعه‌یافته LARP با محدودیت پنجره زمانی نیز برای تمامی موارد ذکر شده کاربرد دارد زیرا انجام همه این امور در یک بازه زمانی مشخص به طور قطع مطلوب‌تر است. اما بحث ریسک تعریف شده در مدل الزاما برای تمامی موارد کاربرد نداشته باشد و تنها در مواردی که ماندن ماده حمل‌شونده در ماشین با ریسک همراه است کاربرد

بررسی نکرده و از ترکیب روش‌های فراابتکاری برای حل مسئله استفاده کرد. (Huber, 2016) نیز به حل این مسئله در حالت دو هدفه (کاهش هزینه و زمان سفر) با استفاده از روش VNS پرداخته است. اما در این تحقیق تنها توابع هدف به صورت مدل ریاضی ارائه شده و مدلی برای محدودیت‌های مسئله ارائه نشده است. بنابراین مشخص نیست که نوع مدل و محدودیت‌های کارکردی آن چگونه است.

(Riquelme-Rodríguez, Gamache, and Langevin, 2016) مدل دو هدفه‌ی ارائه شده است، فقط توابع هدف به صورت ریاضی مدل‌سازی شده است و به نحوه مدل‌سازی محدودیت‌ها اشاره نشده است. (Amini, Tavakkoli-Moghaddam, and Ebrahimnejad, 2017) در قالب دو سناریو مدلی در شرایط قطعی و عدم قطعیت ارائه داده‌اند که تنها برای چند مثال عددی آن‌ها را به صورت سناریو محور حل کرده‌اند. (Tavakkoli-Moghaddam, Amini, and Ebrahimnejad, 2018) دو مدل با فرض مجاز بودن یا نبودن سرویس‌دهی چندمحصولی در هر مسیر ارائه داده‌اند. این ویژگی یک ویژگی ساختاری نبوده و تغییرات اساسی در مدل پایه ایجاد نمی‌کند. (Kahfi, Seyyedhosseni, and Tavakkoli-Moghaddam, 2019) نیز یک مدل دو هدفه مبتنی بر کاهش مقدار ماده حمل‌شونده ارائه داده و برای مطالعه موردی کاربردی تعیین تعداد خزانه یک بانک استفاده کرده است.

## ۲-۲- رویکرد بهینه‌سازی استوار

بهینه‌سازی استوار رویکردی است که در سال‌های اخیر برای مقابله با عدم قطعیت داده‌ها توسعه یافته است. در این رویکرد به دنبال جواب‌های نزدیک به بهینه هستیم که با احتمال بالایی موجه باشند. به عبارت دیگر بتوانیم با کمی صرف نظر کردن از تابع هدف، موجه بودن جواب بدست آمده را تضمین کنیم. مالوی و همکاران (Mulvey, Vanderbei, and Zenios, 1995) رویکردی ارائه کردند که فرمول‌بندی‌های برنامه‌ریزی آرمانی را با سناریوهای داده‌های مسئله ترکیب می‌کند. در اوایل دهه ۱۹۷۰ سوyster (Soyster, 1973) یک مدل بهینه‌سازی خطی ارائه کرد که بهترین جواب موجه برای همه داده‌های ورودی را به ما می‌دهد به طوری که هر داده ورودی می‌تواند هر مقداری را از یک بازه بگیرد. این رویکرد تمایل به یافتن جواب‌هایی دارد که بسیار محافظه‌کارانه باشد. بدین معنی که برای اطمینان از استوار بودن جواب در این رویکرد به مقدار زیادی از بهینگی مسئله اسمی دور

## جدول ۱. انواع مسائل مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار

نام	کاربرد	معادل لاتین
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار دوره‌ای	حمل کالای ارزشمند، جمع‌آوری زباله	Periodic CARP (PCARP)
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار با پنجره-های زمانی	حمل کالای ارزشمند، زمان‌بندی خطوط پرواز در فرودگاه و جاروی خیابان‌ها	CARP with Time Windows (CARPTW)
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار چندانباره	حمل کالای ارزشمند، جمع‌آوری زباله، یخ‌زدایی جاده‌ها در زمستان و جاروی خیابان‌ها، در صورت بزرگ بودن ناحیه موردبررسی	Multi-Depot CARP (MDCARP)
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار وابسته به زمان	حمل کالای ارزشمند، یخ‌زدایی جاده‌ها در زمستان به شرط مهم بودن زمان‌بندی هر عملیات	Time Dependent CARP (TDCARP)
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار باز	کتورخوانی سازمان‌هایی مانند توزیع آب، برق و گاز	Open CARP (OCARP)
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار با تحویل چندبخشی	جمع‌آوری زباله با فرض امکان پرشدن وسیله نقلیه در میانه سرویس دهی، توزیع خوراک دام جمع‌آوری دسته‌های مختلف	Split Delivery CARP (SDCARP)
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار چندبخشی عمومی	زباله‌های خانگی (مثلاً زباله‌های قابل بازیافت و زباله‌های عمومی)	Multi-Compartment CARP (MCCARP)
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار با نقاط بازپرسازی	علامت‌گذاری جاده‌ها	CARP-RP
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار با تسهیلات میانی	جمع‌آوری زباله با فرض وجود تجهیزات میانی برای تخلیه، یخ‌زدایی جاده‌ها یا فرض تجهیزات میانی برای بارگیری شن و نمک حمل کالای ارزشمند، جمع‌آوری	CARP with Intermediate (CARPIF)
مسئله مسیریابی کمان ظرفیت‌دار احتمالی تقاضا	زباله و برف‌روبی خیابان‌ها به دلیل نامعین بودن مقدار دقیق تقاضا	Stochastic CARP (SCARP)

(Doulabi and Seifi, 2013) دو مدل برنامه‌ریزی یکپارچه مختلط برای LARP تک انبار و چندانباره ارائه نموده و با روش فراابتکاری SA حل کرده است. (Lopes et al., 2014) نیز یک مدل ریاضی ارائه دادند که به دلیل بالا بودن تعداد اندیس در متغیرها و بزرگ شدن مسئله با روش دقیقی حل نشده و از روش SA با کمک الگوریتم ابتکاری مکان‌یابی - تخصیص استفاده شده است. (Essink and Wagelmans, 2015) مدلی با اندیس‌های زیاد و نسبتاً بزرگ ارائه کردند که حل آن با روش‌های دقیق را

همپوشانی ارائه شده خطی باقی می‌ماند. با توجه به این رویکرد، با احتمال کمی ممکن است تمامی ضرایب با هم دچار عدم قطعیت شوند.

### ۳- مدل‌سازی ریاضی

مفروضات، اندیس‌ها، پارامترها، متغیرهای تصمیم، مدل برنامه‌ریزی ریاضی توسعه‌یافته LARP و خطی‌سازی مدل در این بخش توضیح داده شده است.

#### ۳-۱- مفروضات

- کمان دارای تقاضا توسط یک وسیله نقلیه ملاقات شود.
- وسیله نقلیه به همان انباری که سفر را از آن شروع کرده است برمی‌گردد.
- کل تقاضای کمان‌های دارای تقاضا در یک تور از ظرفیت وسیله نقلیه سرویس‌دهنده آن تور کم‌تر باشد.
- تعداد کمان‌های بدون تقاضا در یک تور حداقل باشد.
- انبارها از قبل احداث شده و در صورت انتخاب آن‌ها هزینه افزایش امنیت آن‌ها مورد نظر است.
- زمان انتظار فقط در زمان شروع سرویس‌دهی برای هر کمان مجاز است.
- نحوه توزیع کالا بین مشتریان از نوع تحویل و جمع‌آوری کالا است. به نحوی که بسته‌های تحویلی به هر مشتری قبل از شروع سفر مشخص و بسته‌های جمع‌آوری شده از مشتریان در طول سفر دست‌نخورده به انبار ارسال می‌شود.

#### ۳-۲- اندیس‌ها

- $I$ : مجموعه کلیه رئوس  $I = \{1, \dots, i\}$  که شامل مشتریان و انبارها است.
- $J$ : مجموعه انبارها  $J = \{1, \dots, j\}$  که  $j'$  تعداد انبارها است و شمارنده انبارها از رأس ۱ تا  $j'$  است.
- $K$ : مجموعه وسایل نقلیه  $K = \{1, \dots, k\}$
- $P$ : تعداد دوره‌های برنامه‌ریزی  $P = \{1, \dots, p\}$
- $S$ : گام‌هایی که هر وسیله نقلیه طی می‌کند  $S = \{1, \dots, s\}$
- $A$ : مجموعه کمان‌هایی که باید سرویس‌دهی شود.
- $V_A$ : مجموعه رئوسی تشکیل‌دهنده کمان‌های مجموعه  $A$
- $V$ : اجتماع مجموعه  $J$  و  $V_A = J \cup V_A$  یا به عبارتی مجموعه تمام رئوس گراف

می‌شویم. محققان زیادی (Ben-Tal and Nemirovski, 2000)، (Ben-Tal and Nemirovski, 1999)، (Ben-Tal and Nemirovski, 1998)، (EI-Ghaoui and Lebret, 1997) فرض اینکه داده‌ها در مجموعه‌های بیضوی دارای عدم قطعیت هستند الگوریتم‌های کارایی برای حل مسائل بهینه‌سازی محدب تحت عدم قطعیت داده‌ها ارائه نموده‌اند. با این وجود با توجه به اینکه فرمول‌بندی‌های استوار به دست‌آمده از مسائل درجه دو مخروطی می‌باشند، این روش‌ها نمی‌توانند به طور مستقیم برای مسائل بهینه‌سازی گسسته مورد استفاده قرار گیرند. برتسیماس و سیم (Bertsimas and Sim, 2004) رویکرد متفاوتی را برای کنترل سطح محافظه‌کاری معرفی کرده‌اند. این رویکرد از این مزیت برخوردار است که منجر به یک مدل بهینه‌سازی خطی می‌گردد. بنابراین قابل اعمال بر روی مدل‌های بهینه‌سازی گسسته نیز است.

#### ۳-۲-۱- مدل استوار برتسیماس و سیم

مدل‌های متفاوتی جهت فرموله کردن مسائل بهینه‌سازی خطی با روش‌های استوار توسعه داده شده است. سه مدل اصلی و پایه در روش‌های استوار بر اساس عدم قطعیت بازه‌ای؛ مدل استوار سویستر (Soyster, 1973)، مدل استوار بن-تال و نیمروفسکی (Ben-Tal and Nemirovski, 2000)، (Ben-Tal and Nemirovski, 1999) و مدل استوار برتسیماس و سیم (Bertsimas and Sim, 2004) است. در این تحقیق از رویکرد برتسیماس و سیم برای مواجهه با عدم قطعیت استفاده شده است. علت برتری این رویکرد نسبت به دو رویکرد دیگر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

- رویکرد سویستر در بین سایر رویکردها محافظه‌کارانه‌ترین روش است و مقدار تابع هدف بسیار بدتری از مقدار تابع هدف مسئله بهینه‌سازی خطی اسمی ارائه می‌کند و از این رو هزینه بسیار زیادی را به مدل تحمیل می‌کند که جهت حل مسائل واقعی مناسب نیست.
- مدل بن-تال و نیمروفسکی یک مدل مخروطی درجه دو با  $n + 2k$  متغیر و  $m + 2k$  محدودیت است و از آنجا که این مدل غیر خطی می‌باشد برای حل مدل‌های بهینه‌سازی گسسته چندان جذاب و موثر نیست.
- برتسیماس و سیم (Bertsimas and Sim, 2004) یک رویکرد واقع‌گرایانه جدید برای بهینه‌سازی خطی قوی است که در آن مدل

$v_{iksp}$ : مقدار کالایی که در زمان رسیدن وسیله  $k$  به گره  $i$  در گام  $s$  سفرش در دوره  $p$  در وسیله نقلیه وجود دارد.  
 $h'_{ij'mijksp}$ : متغیر تصمیم باینری.  
 $u_{ikp}$ : متغیر اضافه برای حذف زیرتور.

$\hat{A}$ : مجموعه کمان‌ها که یک گراف کامل را با رئوس مجموعه  $V$  تشکیل می‌دهد.  
 $(\delta^+(J))(\delta^-(J))$ : مجموعه کمان‌هایی که یکی از رئوس آن انبار  $J$  را ترک (به انبار  $J$  وارد) می‌کند.

### ۳-۵- مدل ریاضی MOMP-LARP-TWR

مدل ریاضی پیشنهادی یک مدل غیرخطی ترکیبی با متغیرهای باینری و غیرمنفی است. تابع هدف اول و محدودیت‌های (۴) تا (۱۰)، مدل پایه CARP را تشکیل می‌دهد. مدل پایه CARP به‌اضافه محدودیت (۱۱) تا (۱۴) مدل پایه LARP را می‌سازد. این محدودیت‌ها اصلاح‌شده محدودیت‌های خطی ارائه‌شده توسط آقای لوپز و همکاران است. زیرا محدودیت‌های ارائه‌شده در لوپز و همکاران منجر به اختصاص یک وسیله نقلیه به هر مشتری می‌شد که در شرایط واقعی امکان‌پذیر نیست. تابع هدف سوم و محدودیت‌های (۱۷) تا (۲۴) و مبحث پنجره زمانی را پوشش می‌دهد. همچنین تابع هدف دوم و محدودیت‌های (۲۵) تا (۲۸) و با کاهش مقدار ماده حمل‌شونده و مدت‌زمان حمل ریسک ضرر ناشی از سرقت احتمالی را کاهش می‌دهد.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z_1 = & \sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{j' \in J} \sum_{p \in P} f_{j'p} w_{ijj'p} \\ & + \sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} c_{ijp} x_{ijksp} \\ & + \sum_{(i,j) \in \delta^+(J)} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} F_k x_{ijksp} \\ & + \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} e_p v_{0k1p} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Min } Z_2 = \max_{(i,j) \in \hat{A}, k \in K, p \in P} \sum_{s \in S} (\hat{d}_{ijp} + \beta_{ijksp}) t_{ij} \quad (2)$$

$$\text{Min } Z_3 = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S \setminus \{1\}} \sum_{p \in P} (\rho_{ijksp} - \varphi_{iksp}) \quad (3)$$

s.t.

$$\sum_{k \in K} \sum_{s \in S} y_{ijksp} = 1 \quad \forall (i,j) \in A, p \in P \quad (4)$$

$$x_{ijksp} \geq y_{ijksp} \quad \forall (i,j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (5)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ijksp} \leq 1 \quad \forall k \in K, s \in S, p \in P \quad (6)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ijksp} - \sum_{(i,j) \in \delta^-(i)} x_{ijksp} = 0 \quad (7)$$

### ۳-۳- پارامترها

$F_k$ : هزینه‌های ثابت استفاده از یک وسیله نقلیه  
 $f_{j'p}$ : هزینه‌های تأمین امنیت انبار  $J'$  در دوره  $p$  (انبارها موجود و به جای هزینه احداث، هزینه برقراری امنیت آن‌ها مطرح است).  
 $c_{ijp}$ : هزینه‌های حرکت بر روی کمان  $(i,j)$  در دوره  $p$ ، اگر کمان  $(i,j)$  دارای تقاضا و توسط یک وسیله نقلیه سرویس داده شود هزینه سفر بر روی آن برابر  $\hat{c}_{ijp}$  و اگر یک کمان بدون تقاضا باشد هزینه برابر  $\hat{c}_{ijp}$  خواهد بود.  
 $\hat{d}_{ijp}$ : تقاضای کمان  $(i,j)$  در دوره  $p$ ، در صورتی که تقاضا (پارامتر غیرقطعی) مرتبط با جمع‌آوری کالا باشد این پارامتر مقدار مثبت و در صورتی که مرتبط با تحویل کالا باشد، مقدار منفی دارد.

$Q_{kp}$ : ظرفیت ثابت وسیله نقلیه  $k$  در دوره  $p$

$b_{j'p}$ : ظرفیت انبار  $J'$  در دوره  $p$

$\hat{t}_{ij}$ : زمان سفر روی کمان  $(i,j)$  دارای تقاضا

$t_{ij}$ : زمان سفر روی کمان  $(i,j)$  بدون تقاضا

$N$ : تعداد مشتری

$M$ : یک عدد خیلی بزرگ

### ۳-۴- متغیرهای تصمیم

$x_{ijksp}$ : اگر کمان  $(i,j) \in \hat{A}$  توسط وسیله  $k$  در گام  $s$  در دوره  $p$  ملاقات شود یک و در غیراین صورت صفر است.

$y_{ijksp}$ : اگر کمان  $(i,j) \in A$  توسط وسیله  $k$  در گام  $s$  در دوره  $p$  سرویس‌دهی شود یک و در غیراین صورت صفر است.

$w_{ijj'p}$ : اگر کمان  $(i,j) \in A$  به انبار  $J'$  در دوره  $p$  اختصاص یابد یک و در غیراین صورت صفر است.

$\omega_{ijp}$ : زمانی که سرویس‌دهی به کمان  $(i,j) \in A$  در دوره  $p$  شروع می‌شود.

$\varphi_{iksp}$ : زمانی که وسیله  $k$  در گام  $s$  در دوره  $p$  به گره  $i$  می‌رسد.

$\rho_{ijksp}$ : زمانی که وسیله  $k$  در گام  $s$  در دوره  $p$  سفرش را از کمان  $(i,j)$  شروع می‌کند.

$\beta_{ijksp}$ : مقدار کالایی که توسط وسیله  $k$  در گام  $s$  سفرش در دوره  $p$  در کمان  $(i,j)$  منتقل می‌شود.

$$\begin{aligned} & \forall (i, j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \\ & \beta_{ijksp} + \tilde{d}_{ijp} - v_{jks+1p} \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad (26) \\ & \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v_{jks+1p} - (\beta_{ijksp} + \tilde{d}_{ijp}) \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad (27) \\ & \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$v_{0k1p} = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} \tilde{d}_{ijp} y_{ijksp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (28)$$

$$x_{ijksp}, y_{ijksp}, w_{ijj'p}, u_{ikp} \in \{0, 1\} \quad (29)$$

$$\varphi_{iksp}, \rho_{ijksp}, \omega_{ijp}, v_{iksp}, \beta_{ijksp} \geq 0$$

تابع هدف (۱) هزینه‌های کل شامل هزینه تجهیز انبار، سرویس‌دهی به کمان دارای تقاضا، استفاده از وسایل نقلیه و هزینه بیمه نقدینگی را حداقل می‌کند. تابع هدف دوم (۲) ماکزیمم مقدار ماده حمل‌شونده در مدت زمان حمل را حداقل می‌کند. با توجه به اهمیت کالای حمل‌شونده در این تحقیق، ارزش مقدار کالای حمل شده و زمان تردد وسیله نقلیه به طور غیرمستقیم بر روی ریسک تأثیرگذار است. زیرا هرچه تردد وسیله نقلیه با کالای ارزشمند بیشتر طول بکشد احتمال سرقت افزایش می‌یابد. بنابراین با کمینه‌سازی این تابع هدف ضرر ناشی از سرقت احتمالی کم‌تر می‌شود. زمان انتظار وسیله نقلیه برای سرویس‌دهی مجاز است، بنابراین تابع هدف (۳) به دنبال کاهش مقدار آن است.

محدودیت (۴)، تأمین تقاضای همگی کمان‌هایی که باید سرویس‌دهی شوند را تضمین می‌کند. محدودیت (۵) تضمین می‌کند که اگر کمان دارای تقاضا توسط یک وسیله نقلیه سرویس‌دهی شود، حتماً توسط آن وسیله پیموده شده است. محدودیت (۶) نشان می‌دهد که هر وسیله نقلیه بیشتر از یک وظیفه را انجام می‌دهد. محدودیت (۷) حفظ جریان را تضمین می‌کند. محدودیت (۸) تضمین می‌کند که تعداد وسایل نقلیه‌ای که انبار را در گام اول ترک می‌کنند برابر تعداد وسایل نقلیه‌ای است که در گام‌های متوالی وارد انبار می‌شوند. محدودیت (۹) محدودیت حذف زیرتور است. محدودیت (۱۰) محدودیت رعایت ظرفیت وسایل نقلیه است. محدودیت (۱۱) این اطمینان را به وجود می‌آورد که کمان‌های دارای تقاضا به درستی به انبار اختصاص یابد. محدودیت (۱۴) اطمینان می‌دهد که میزان کالای جابجاشده از ظرفیت انبار تجاوز نمی‌کند. محدودیت (۱۵) تضمین می‌کند که مدت‌زمان حرکت وسیله نقلیه از مدت‌زمان مجاز آن برای حرکت تجاوز نمی‌کند. محدودیت (۱۶) اطمینان می‌دهد که میزان ریسک مسیر از مقدار آستانه‌ای آن تجاوز

$$\begin{aligned} & \forall i \in V_A \setminus \{0\}, k \in K, s \in S, p \in P \\ & \sum_{s \in S} \sum_{j \in \delta^+(0)} x_{j0ksp} - \sum_{j \in \delta^-(0)} x_{0jk1p} = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall k \in K, p \in P \\ & u_{ikp} - u_{jkp} + N x_{ijksp} \leq N - 1 \quad (9) \\ & \forall (i, j) \in V_A, i \neq j, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} \tilde{d}_{ijp} y_{ijksp} \leq Q_{kp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (10)$$

$$\sum_{m \in V_A} \sum_{s \in S} h_{j'mijksp} \leq M w_{ijj'p} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \forall j' \in J, (i, j) \in A, k \in K, p \in P \\ & x_{j'mksp} + y_{ijksp} \leq 1 + h_{j'mijksp} \quad (12) \\ & \forall j' \in J, m \in V_A, (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{j'mksp} + y_{ijksp} \geq 2 * h_{j'mijksp} \quad (13) \\ & \forall j' \in J, m \in V_A, (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\sum_{(i,j) \in R} \tilde{d}_{ijp} w_{ijj'p} \leq b_{j'p} \quad \forall j' \in J, k \in K, p \in P \quad (14)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} t_{ijp} x_{ijkp} \leq T_{kp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (15)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} \beta_{ijk} x_{ijksp} \leq R_{kp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{iksp} - \rho_{ijksp} \leq M(1 - x_{ijksp}) \quad (17) \\ & \forall (i, j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_{ijksp} + \hat{t}_{ij} - \varphi_{jks+1p} \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad (18) \\ & \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{jks+1p} - (\rho_{ijksp} + \hat{t}_{ij}) \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad (19) \\ & \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_{ijksp} + t_{ij} - \varphi_{jks+1p} \\ & \leq M(1 - (x_{ijksp} - y_{ijksp})) \quad (20) \\ & \forall (i, j) \in \hat{A} \setminus A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{jks+1p} - (\rho_{ijksp} + t_{ij}) \\ & \leq M(1 - (x_{ijksp} - y_{ijksp})) \quad (21) \\ & \forall (i, j) \in \hat{A} \setminus A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_{ijksp} - \omega_{ijp} \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad (22) \\ & \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \omega_{ijp} + \hat{t}_{ij} - \rho_{ijksp} \leq M(1 - (x_{ijksp} - y_{ijksp})) \quad (23) \\ & \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \end{aligned}$$

$$\varphi_{0k1p} = 0 \quad \forall k \in K, p \in P \quad (24)$$

$$\beta_{ijksp} - v_{iksp} \leq M(1 - x_{ijksp}) \quad (25)$$

به کمان  $(i, j)$  در گام  $S$  سرویس‌دهی کند پس مقدار کلای موجود در وسیله نقلیه در زمان رسیدن به گره  $j$  برابر مقدار کلایی است که زمان شروع سرویس در ماشین بوده، به اضافه مقدار تقاضای کمان  $(i, j)$  در گام  $S$  است. با توجه مثبت یا منفی بودن مقدار  $\tilde{d}_{ijp}$  به مقدار کلایی که در وسیله نقلیه وجود دارد اضافه می‌شود و یا از آن کم می‌شود. این دو محدودیت اگر وسیله‌ای به این کمان سرویس ندهد، کارکردی نیست. محدودیت (۲۸) نشان می‌دهد که هر وسیله نقلیه در گام اول با مقدار مجموع تقاضایی که وسیله در آن مسیر حمل می‌کند، سفر خود را شروع می‌کند. محدودیت (۲۹) متغیرهای باینری و غیرمنفی را تعیین می‌کند.

### ۳-۶- مدل خطی استوار LARP تحت شرایط عدم

#### قطعیت

در مدل پیشنهادی (در بخش ۳-۵)، تقاضا دارای عدم قطعیت بوده و  $\tilde{d}_{ijp} \in [d_{ijp} - \hat{d}_{ijp}, d_{ijp} + \hat{d}_{ijp}]$  در محدودیت‌های (۱۰)، (۱۴)، (۲۶)، (۲۷) و (۲۸) یک پارامتر دارای عدم قطعیت است. بنابراین، بر اساس، محدودیت بودجه عدم قطعیت برای محدودیت (۱۰) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\max_B \left\{ \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} d_{ijp} \gamma_{ijksp} + \left( \Gamma_{kp} - \left[ \Gamma_{kp} \right] \right) \hat{d}_{ijp} \gamma_{ijksp} \right\} \leq Q_{kp} \quad \forall k, p \quad (30)$$

$$B = \{S_{kp} \cup \{t_{kp}\} | S_{kp} \subseteq J_{kp}, |S_{kp}| = [\Gamma_{kp}], t_{kp} \in J_{kp} \setminus S_{kp}\}$$

به طوری که  $\Gamma_{kp}$  پارامتر کنترل این محدودیت است و نقش تنظیم میزان استواری روش پیشنهادی در مقابل محافظه‌کاری جواب است. به ازای بردار داده شده  $\gamma^*$ ، تابع حفاظت از محدودیت (۳۰) به شرح زیر است.

$$\beta_{kp}(\gamma^*, \Gamma_{kp}) = \max_B \left\{ \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} \hat{d}_{ijp} | \gamma_{ijksp}^* | + \left( \Gamma_{kp} - [\Gamma_{kp}] \right) \hat{d}_{ijp} | \gamma_{ijksp}^* | \right\} \quad (31)$$

$$B = \{S_{kp} \cup \{t_{kp}\} | S_{kp} \subseteq J_{kp}, |S_{kp}| = [\Gamma_{kp}], t_{kp} \in J_{kp} \setminus S_{kp}\}$$

محدودیت (۳۱) برابر با تابع هدف مسئله بهینه‌سازی خطی زیر است.

نمی‌کند. میزان ریسک جاده/خیابان  $(\beta_{ijk})$  بر اساس شاخص‌های اثرگذار بر آن که عبارتند از نوع آن (فرعی یا اصلی بودن)، نوع تردد مجاز (یک‌طرفه یا دوطرفه بودن)، عرض، ترافیک و وزن‌دهی به آن‌ها (وزن‌ها بین ۰ و ۱) بر طبق نظر خبرگان محاسبه شده است. مقدار آستانه‌ای ریسک با تجربه خبرگان و اطلاعات تاریخی موجود از مسیرها تعیین شده است. تعریف گام‌هایی که یک وسیله نقلیه طی می‌کند و با اندیس  $S$  نمایش داده شده است تا محدودیت (۱۶) در مدل تأثیری نداشته است. بنابراین در صورتی که مدل بدون محدودیت‌های مرتبط با ریسک و پنجره زمانی استفاده شود به تعریف این اندیس نیازی نیست. اما تعریف این اندیس در محدودیت (۱۷) تا (۲۸) به دلیل نیاز به محاسبه زمان رسیدن به گره  $j$  یا محاسبه مقدار کلای موجود در گره  $j$  به اطلاعات گره  $i$  که در گام قبلی وسیله نقلیه رخ داده است، ضروری است.

محدودیت (۱۷) تضمین می‌کند که اگر یک وسیله  $k$ ، کمان  $(i, j)$  را در گام  $S$  طی کند زمان شروع سفر نمی‌تواند قبل از زمان رسیدن وسیله به گره  $i$  در گام  $S$  باشد. محدودیت (۱۸) و (۱۹) با هم تضمین می‌کنند که اگر وسیله نقلیه به کمان  $(i, j)$  در گام  $S$  سرویس‌دهی کند پس زمان رسیدن به گره  $j$  برابر زمان شروع سرویس به اضافه زمان سرویس است. این دو محدودیت اگر وسیله‌ای این کمان را سرویس‌دهی نکند، کارکردی نیستند.

محدودیت‌های (۲۰) و (۲۱) تضمین می‌کند که اگر یک وسیله کمان غیرتقاضا را در گام  $S$  طی کند، پس زمان رسیدن به گره  $j$  برابر زمان شروع سفر به اضافه زمان سفر است. این محدودیت‌ها نیز اگر وسیله نقلیه این کمان را برای مسافرت انتخاب نکند کارکردی نیست. در محدودیت (۲۲) متغیر زمان سرویس  $(i, j)$  برابر با زمانی که وسیله سرویس کمان  $(i, j)$  را شروع می‌کند، قرار داده شده است. محدودیت (۲۳) تضمین می‌کند که هر سفر بر روی کمان دارای تقاضا (که جهت تردد انتخاب شده است نه سرویس‌دهی) زودتر از زمان اتمام سرویس این کمان شروع نشود. این محدودیت برای زمانی که کمان سرویس‌دهی می‌شود محدودکننده نیست. محدودیت (۲۴) نشان می‌دهد که هر وسیله نقلیه در گام اول در زمان صفر، سفر خود را از انبار شروع می‌کند. محدودیت (۲۵) تضمین می‌کند که اگر یک وسیله  $k$ ، کمان  $(i, j)$  را در گام  $S$  طی کند مقدار کلایی که در زمان شروع سفر در وسیله نقلیه وجود دارد کوچک‌تر یا برابر کلایی است که قبل از زمان رسیدن وسیله به گره  $i$  در گام  $S$  در وسیله وجود داشته است. محدودیت‌های (۲۶) و (۲۷) تضمین می‌کنند که اگر وسیله نقلیه

$$\text{Min } Z_2 = \sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} (d_{ijp} x'_{ijp} + \beta_{ijksp}) t_{ij} + q^0 \Gamma^0 \quad (39)$$

$$\text{Min } Z_3 = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{s \in S \setminus \{1\}} \sum_{p \in P} (\rho_{ijksp} - \varphi_{iksp}) \quad (40)$$

s.t.

$$\sum_{k \in K} \sum_{s \in S} y_{ijksp} = 1 \quad \forall (i,j) \in \hat{A}, p \in P \quad (41)$$

$$x_{ijksp} \geq y_{ijksp} \quad \forall (i,j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (42)$$

$$\sum_{(i,j) \in \hat{A}} x_{ijksp} \leq 1 \quad \forall k \in K, s \in S, p \in P \quad (43)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ijksp} - \sum_{(i,j) \in \delta^-(i)} x_{ijksp} = 0 \quad \forall i \in V_A \setminus \{0\}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (44)$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{j \in \delta^+(0)} x_{joksp} - \sum_{j \in \delta^-(0)} x_{ojk1p} = 0 \quad \forall k \in K, p \in P \quad (45)$$

$$u_{ikp} - u_{jkp} + N_p x_{ijksp} \leq N_p - 1 \quad \forall (i,j) \in V_A, i \neq j, k \in K, s \in S, p \in P \quad (46)$$

$$\sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{s \in S} d_{ijp} y_{ijksp} + q_{kp}^1 \Gamma_{kp}^1 + \sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{s \in S} r_{ijksp}^1 \leq Q_{kp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (47)$$

$$q_{kp}^1 + r_{ijksp}^1 \geq \hat{d}_{ijp} y_{ijksp} \quad \forall (i,j) \in \hat{A}, k, s, p \quad (48)$$

$$\sum_{m \in V_A} \sum_{s \in S} h_{j'mijksp} \leq M w_{ijj'p} \quad \forall j' \in J, (i,j) \in \hat{A}, k \in K, p \in P \quad (49)$$

$$x_{j'mksp} + y_{ijksp} \leq 1 + h_{j'mijksp} \quad \forall j' \in J, m \in V_A, (i,j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (50)$$

$$x_{j'mksp} + y_{ijksp} \geq 2 * h_{j'mijksp} \quad \forall j' \in J, m \in V_A, (i,j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (51)$$

$$\sum_{(i,j) \in \hat{A}} t_{ijp} x_{ijksp} \leq T_{kp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (52)$$

$$\sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{s \in S} \beta_{ijk} x_{ijksp} \leq R_{kp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (53)$$

$$\sum_{(i,j) \in \hat{A}} d_{ijp} w_{ijj'p} + q_{j'p}^2 \Gamma_{j'p}^2 + \sum_{(i,j) \in \hat{A}} r_{ijj'p}^2 \leq b_{j'p} \quad \forall j' \in J, p \in P \quad (54)$$

$$q_{j'p}^2 + r_{ijj'p}^2 \geq \hat{d}_{ijp} w_{ijj'p} \quad \forall (i,j) \in \hat{A}, j' \in J, p \in P \quad (55)$$

$$\varphi_{iksp} - \rho_{ijksp} \leq M(1 - x_{ijksp}) \quad \forall (i,j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (56)$$

$$\rho_{ijksp} + t_{ij} - \varphi_{jks+1p} \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad \forall (i,j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (57)$$

$$\varphi_{jks+1p} - (\rho_{ijksp} + t_{ij}) \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad \forall (i,j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (58)$$

$$\rho_{ijksp} + t_{ij} - \varphi_{jks+1p} \leq M(1 - (x_{ijksp} - y_{ijksp})) \quad \forall (i,j) \in \hat{A} \setminus A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (59)$$

$$\beta_{kp}(y^*, \Gamma_{kp}) = \max \left\{ \sum_{j'' \in J_{ksp}} \hat{d}_{ijp} |y_{j''}^*| z_{ijj''} \right\} \quad (32)$$

$$s.t. \quad \sum_{j'' \in J_{ksp}} z_{ijj''} \leq \Gamma_{kp} \quad (33)$$

$$0 \leq z_{ijj''} \leq 1 \quad (34)$$

با معرفی متغیرهای  $r_{ijksp}^1$  و  $q_{kp}^1$  مدل دوگان به شرح زیر است.

$$\text{Min } q_{kp}^1 \Gamma_{kp} + \sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{s \in S} r_{ijksp}^1 \quad (35)$$

$$s.t. \quad q_{kp}^1 + r_{ijksp}^1 \geq \hat{d}_{ijp} |y_{ijksp}| \quad \forall (i,j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (36)$$

$$q_{kp}^1, r_{ijksp}^1 \geq 0 \quad (37)$$

بنابراین مدل خطی استوار LARP به صورت محدودیت ۳۸ تا ۷۷ قابل مدل‌سازی است، به این صورت که با جایگزینی مدل دوگان بالا، محدودیت (۱۰) با محدودیت‌های (۴۷) و (۴۸) و محدودیت (۱۴) با محدودیت‌های (۵۴) و (۵۵) جایگزین خواهد شد. محدودیت (۲۶) حالت استاندارد محدودیت مدل برتسیماس ( $Ax \leq b$ ) را ندارد زیرا  $\hat{d}_{ijp}$  که دارای عدم قطعیت است در یک متغیر تصمیم ضرب نشده است. بنابراین متغیر جدید  $0 \leq x'_1 \leq 1$  به مسئله اضافه شده و محدودیت به صورت  $Ax - bx'_1 \leq 0$  نوشته می‌شود. در نتیجه محدودیت (۲۶) با محدودیت‌های (۶۴) و (۶۵) زیر جایگزین خواهد شد. و به طور مشابه محدودیت (۲۷) نیز با افزودن متغیر  $x'_2$  با محدودیت‌های (۶۶) و (۶۷) جایگزین می‌شود. محدودیت (۲۸) نیز یک محدودیت تساوی است که با محدودیت‌های (۶۸) تا (۶۹) جایگزین می‌شود. تابع هدف دوم (محدودیت ۲) نیز در قالب استاندارد تابع هدف مدل برتسیماس نیست. بنابراین با افزودن متغیر  $x'_3$  این تابع هدف با محدودیت‌های (۳۹) تا (۷۳) جایگزین می‌شود.

$$\text{Min } Z_1 = \sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{j' \in J} \sum_{p \in P} f_{j'p} w_{ijj'p} + \sum_{(i,j) \in \hat{A}} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} c_{ijp} x_{ijksp} + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in \delta^+(J)} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} F_k x_{ijksp} + \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} e_p v_{ok1p} \quad (38)$$

نشده است (Kahfi, Seyyedhosseni, and Tavakkoli-Moghaddam, 2017). در این تحقیق از روش E-محدودیت برای حل مدل با استفاده از نرم‌افزار GAMS استفاده شده است.

#### ۴-۱- مسائل استاندارد

جهت اعتبارسنجی مدل پیشنهادی نیاز به مقایسه نتایج با مسائل استاندارد وجود دارد. مسائل استاندارد برای CVRP در ('http://lore.web.ua.pt/') طراحی شده است و در (Huber, 2016) متناسب با مسائل LARP تغییر پیدا کرده است. اما به دلیل عدم ارائه محدودیت‌های مدل ریاضی در (Huber, 2016) و نوآوری‌های ارائه شده در مدل تحقیق حاضر امکان مقایسه نتایج جهت اعتبارسنجی مدل پیشنهادی وجود ندارد. بنابراین جهت ارزیابی اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، ۲۲ مسأله استاندارد در (Huber, 2016) با روش E-محدودیت حل شده است. ابعاد مسائل استاندارد در جدول ۲ ارائه شده است.

مقادیر توابع هدف برای ۲۲ مسئله استاندارد با حل آن‌ها به روش E-محدودیت در جدول ۳ گزارش شده است. در روش E-محدودیت تعداد ۳ شکست برای هر تابع هدف در نظر گرفته شده و در مجموع حداکثر ۹ نقطه پارتویی برای هر مسئله تولید شده است. همچنین هر یک از روش‌های فراابتکاری برای هر مسئله ۱۰ بار اجرا شده و زمان و مقادیر توابع هدف این ۱۰ اجرا میانگین‌گیری شده است. با توجه به NP-hard بودن مسئله و عدم توانایی روش E-محدودیت برای حل مسئله ۹ تا ۲۲ در ۴۸ ساعت، جواب بهینه برای ۸ مسئله اول ارائه شده و برای سایر مسائل جواب محلی بعد از ۴۸ ساعت اجرا گزارش شده است که الزاما بهترین جواب محاسبه شده نیست.

#### ۴-۲- نتایج اعتبارسنجی مدل LARP استوار

به‌منظور اعتبارسنجی مدل پیشنهادی استوار یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی ارائه شده است. این مدل که در واقع شبیه‌سازی واقعیت است مدل واقع‌نمایی<sup>۱۲</sup> نامیده می‌شود. در مدل واقع‌نمایی مقادیر پارامترهای غیرقطعی به‌صورت تصادفی تولید می‌شود به‌طوری‌که برای پارامترهای تقاضا و بازدهی این مقادیر تصادفی از بازه مربوطه بر اساس توزیع یکنواخت و برای پارامتر نرخ تبدیل یک سناریوی تصادفی در هر بار واقع‌نمایی انتخاب می‌شود ( $d_{real}$ ).

$$\varphi_{jks+1p} - \rho_{ijksp} - t_{ij} \leq M(1 - (x_{ijksp} - y_{ijksp})) \quad (60)$$

$$\rho_{ijksp} - \omega_{ijp} \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad (61)$$

$$\omega_{ijp} + t_{ij} - \rho_{ijksp} \leq M(1 - (x_{ijksp} - y_{ijksp})) \quad (62)$$

$$\beta_{ijksp} - v_{iksp} \leq M(1 - x_{ijksp}) \quad (63)$$

$$\beta_{ijksp} + d_{ijp}x'_1 - v_{jks+1p} + q_{ijksp}^3 \Gamma_{ijksp}^3 + r_{ijksp}^3 \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad (64)$$

$$q_{ijksp}^3 + r_{ijksp}^3 \geq \hat{d}_{ijp}x'_1 \quad (65)$$

$$v_{jks+1p} - \beta_{ijksp} - d_{ijp}x'_2 + q_{ijksp}^4 \Gamma_{ijksp}^4 + r_{ijksp}^4 \leq M(1 - y_{ijksp}) \quad (66)$$

$$q_{ijksp}^4 + r_{ijksp}^4 \geq -\hat{d}_{ijp}x'_2 \quad (67)$$

$$v_{0k1p} - \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} d_{ijp}y_{ijksp} + q_{kp}^5 \Gamma_{kp}^5 + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} r_{ijksp}^5 \leq 0 \quad (68)$$

$$q_{kp}^5 + r_{ijksp}^5 \geq \hat{d}_{ijp}y_{ijksp} \quad (69)$$

$$-v_{0k1p} + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} d_{ijp}y_{ijksp} + q_{kp}^6 \Gamma_{kp}^6 + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} r_{ijksp}^6 \leq 0 \quad (70)$$

$$q_{kp}^6 + r_{ijksp}^6 \geq \hat{d}_{ijp}y_{ijksp} \quad (71)$$

$$\varphi_{0k1p} = 0 \quad (72)$$

$$q^0 + r_{ijksp}^0 \geq (\hat{d}_{ijp}x'_3 + \beta_{ijksp})t_{ij} \quad (73)$$

$$x_{ijksp}, y_{ijksp}, w_{ijj'p}, u_{ikp}, h_{j'mijksp} \in \{0,1\} \quad (74)$$

$$\varphi_{iksp}, \rho_{ijksp}, \omega_{ijp}, v_{iksp}, \beta_{ijksp} \geq 0 \quad (75)$$

$$q_{kp}^1, r_{ijksp}^1, q_{j'p}^2, r_{ijj'p}^2, q_{ijksp}^3, r_{ijksp}^3, q_{ijksp}^4, r_{ijksp}^4, q_{kp}^5, r_{ijksp}^5, q_{kp}^6, r_{ijksp}^6, q^0, r_{ijksp}^0 \geq 0 \quad (76)$$

$$0 \leq x'_1, x'_2, x'_3 \leq 1 \quad (77)$$

#### ۴- نتایج محاسباتی

با توجه به NP-hard مسئله LRP (Albareda-Sambola, 2015) مسئله LARP نیز NP-hard است. در تمام مطالعات در حوزه LARP، اشاره شده است که به دلیل NP-hard بودن و تعداد زیاد متغیرهای باینری، امکان حل مدل با روش دقیق بررسی

به منظور تولید مقادیر تصادفی برای پارامترهای غیردقیق تقاضا و بازدهی توزیع یکنواخت استفاده شده است که اعداد تصادفی را بر اساس توزیع یکنواخت بین حدود بالا و پایین بازه‌های مربوطه تولید می‌کند. با توجه به اینکه مدل اصلی پیشنهادی سه‌هدفه است برای حل مدل واقع‌نمایی از روش E-محدودیت که مراحل آن در بخش ۴ بیان شده است، استفاده شده است. این امر با نرمال‌سازی مقدار تابع هدف اول نسبت به سایر توابع هدف و انتقال تابع هدف دوم و سوم به محدودیت‌ها با افزودن متغیر کمکی نامنفی ( $S_i$ ) به آن‌ها انجام شده است. بنابراین مدل واقع‌نمایی بر اساس مباحث مطرح شده به صورت زیر مدل می‌شود.

(Realization model)

$$\begin{aligned} \text{Min } OF_{real} = & \sum_{(i,j) \in \bar{A}} \sum_{j' \in J} \sum_{p \in P} f_{j'p} W_{ijj'p}^* \\ & + \sum_{(i,j) \in \bar{A}} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} c_{ijp} x_{ijksp}^* \\ & + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in \delta^+(j)} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} F_k x_{ijksp}^* \\ & + \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} e_p v_{0k1p}^* - \sum_{i=2}^3 \phi_i S_i + \pi \sum_{l=1}^5 R_l^d \end{aligned} \quad (82)$$

s.t.

$$\sum_{(i,j) \in \bar{A}} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} (d_{ijp}^{real} + \beta_{ijksp}^*) t_{ij} + S_2 = \varepsilon_2 \quad (83)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S \setminus \{1\}} \sum_{p \in P} (\rho_{ijksp}^* - \varphi_{ijksp}^*) + S_3 = \varepsilon_3 \quad (84)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{s \in S} y_{ijksp}^* \quad (85)$$

$$= 1 \quad \forall (i,j) \in A, p \in P \quad (86)$$

$$x_{ijksp}^* \geq y_{ijksp}^* \quad \forall (i,j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (87)$$

$$\sum_{(i,j) \in \bar{A}} x_{ijksp}^* \leq 1 \quad \forall k \in K, s \in S, p \in P \quad (88)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ijksp}^* - \sum_{(i,j) \in \delta^-(i)} x_{ijksp}^* = 0 \quad \forall i \in V_A \setminus \{0\}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (89)$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{j \in \delta^+(0)} x_{j0ksp}^* - \sum_{j \in \delta^-(0)} x_{0jk1p}^* = 0 \quad \forall k \in K, p \in P \quad (90)$$

$$u_{ikp} - u_{jkp} + N_p x_{ijksp}^* \leq N_p - 1 \quad \forall (i,j) \in V_A, i \neq j, k \in K, s \in S, p \in P \quad (91)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} d_{ijp}^{real} y_{ijksp}^* + R_1^d \leq Q_{kp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (92)$$

$$\sum_{m \in V_A} \sum_{s \in S} h_{j'm}^* x_{mijksp}^* \leq M w_{ijj'p}^* \quad \forall j' \in J, (i,j) \in A, k \in K, p \in P$$

جدول ۲. ابعاد ۲۲ مسئله استاندارد (Huber, 2016)

ردیف	نمونه	V	E	R	m	$\bar{f}$	Q	F
۱	gdb-20	۱۱	۲۲	۲۲	۳	۱۰	۲۷	۱
۲	gdb-21	۱۱	۳۳	۳۳	۳	۸	۲۷	۱
۳	gdb-22	۱۱	۴۴	۴۴	۳	۵	۲۷	۵
۴	gdb-23	۱۱	۵۵	۵۵	۳	۱۰	۲۷	۱
۵	gdb-1	۱۲	۲۲	۲۲	۳	۲۰	۵	۵
۶	gdb-2	۱۲	۲۶	۲۶	۳	۲۵	۵	۵
۷	gdb-12	۱۳	۲۳	۲۳	۳	۵۰	۳۵	۵
۸	gdb-5	۱۳	۲۶	۲۶	۳	۲۰	۵	۲
۹	bccm-2A	۲۴	۳۴	۳۴	۵	۲۰	۱۸۰	۵
۱۰	bccm-2C	۲۴	۳۴	۳۴	۵	۵۰	۴۰	۲
۱۱	bccm-3A	۲۴	۳۵	۳۵	۵	۱۵	۸۰	۲
۱۲	bccm-3A	۲۴	۳۵	۳۵	۵	۲۵	۲۰	۵
۱۳	bccm-1B	۲۴	۳۹	۳۹	۵	۱۵	۱۲۰	۲
۱۴	bccm-1C	۲۴	۳۹	۳۹	۵	۲۵	۴۵	۸
۱۵	bccm-8A	۳۰	۶۳	۶۳	۵	۱۰	۲۰۰	۵
۱۶	bccm-6B	۳۱	۵۰	۵۰	۵	۴۰	۱۲۰	۵
۱۷	bccm-5A	۳۴	۶۵	۶۵	۵	۲۰	۲۲۰	۵
۱۸	bccm-5C	۳۴	۶۵	۶۵	۵	۳۰	۱۳۰	۲
۱۹	bccm-7A	۴۰	۶۶	۶۶	۵	۵	۲۰۰	۲
۲۰	bccm-4C	۴۱	۶۹	۶۹	۵	۲۵	۱۳۰	۲
۲۱	bccm-9B	۵۰	۹۲	۹۲	۵	۳۰	۱۷۵	۵
۲۲	bccm-10D	۵۰	۹۷	۹۷	۵	۲۰	۷۵	۵

V: تعداد گره‌ها، E: کمان، R: کمان‌های تقاضا، m: تعداد مکان‌بالقوه انبار،  $\bar{f}$ : متوسط هزینه ثابت انبار، Q: ظرفیت وسیله و F: هزینه ثابت

جدول ۳. نتایج حل مسائل استاندارد با روش E-محدودیت

ردیف	هدف ۱	هدف ۲	هدف ۳	ردیف	هدف ۱	هدف ۲	هدف ۳
۱	۶۵/۳	۱۰/۸	۱۵/۴	۱۲	۳۳۳	۵۴/۶۷	۸۳/۸
۲	۶۷/۸	۱۱/۹۵	۱۸/۲	۱۳	۳۸۱/۲۳	۵۵/۲۱	۱۰۲/۰۳
۳	۶۹	۱۲/۵۱	۱۹/۴	۱۴	۴۲۳/۱۵	۶۰/۱	۱۲۳/۹۵
۴	۷۱/۶	۱۵/۱	۲۲	۱۵	۴۹۶/۶	۶۵/۴۵	۱۴۷/۴
۵	۷۵/۱	۱۶/۸۷	۲۵/۵۵	۱۶	۵۳۴/۱	۷۲/۶۲۵	۱۵۳/۹
۶	۱۴۶/۹	۲۶/۶	۲۷/۳	۱۷	۶۰۱	۷۶/۱۷	۱۷۱/۸
۷	۱۴۹/۱	۲۷/۷۵	۲۹/۹	۱۸	۶۶۹/۲	۸۱/۷۱	۲۴۰
۸	۱۹۲/۱	۲۸/۳۱	۳۲/۸۹	۱۹	۷۱۹/۱۵	۸۷/۶	۲۸۹/۹۵
۹	۲۱۶/۰۶	۳۱/۱	۴۶/۸۶	۲۰	۷۹۴/۶	۹۰/۹۵	۳۲۵/۴
۱۰	۲۵۰	۳۶/۴۵	۵۰/۸	۲۱	۸۵۷/۱	۹۴/۱۲۵	۳۵۶/۵
۱۱	۲۸۹/۱	۵۳/۶۲	۶۹/۹	۲۲	۹۴۳	۱۰۱/۶۷	۴۴۲/۸

مدل واقع‌نمایی برای جواب‌های هر دو مدل قطعی و مدل پیشنهادی ( $x^*, y^*, w^*, \omega^*, \varphi^*, \rho^*, \beta^*, v^*, u^*$ ) حل می‌شود.

با داده اسمی، حالت خوش‌بینانه و بدبینانه و مدل واقع‌نمایی برای مسئله ۲۲ مسائل نمونه ۱۲ بار حل شده (جدول ۴) است.

جدول ۴. عملکرد مدل قطعی و مدل استوار تحت ۱۲ واقع‌نمایی

OF <sup>real</sup>									
واقع‌نمایی			مدل قطعی						
			مدل استوار						
			۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱ (اسمی)			۶۴	۹۰	۵۷	۶۳	۷۴	۳۶	۶۹
۲ (خوش‌بینانه)			۵	۹	۶۵	۱۱	۱۶۳	۱۳	۱۰
۳ (بدبینانه)			۹۶۰۷	۷۴۵۶	۶۸۴	۴۷۸۹	۶۴۵۸	۵۴۱۲	۳۶۲۱
۴			۲۴۱۵	۳۵۴۶	۶۷	۸	۳۴	۴۲	۵۳
۵			۳۲۶۴	۴۴۳۴	۳	۱۵	۳۱	۲۹	۹
۶			۵۴۶۷	۶۵۴	۲۶	۶۴۱	۲۷۹	۱۳۹۲	۲۹۴
۷			۳۲۵۴	۲۳۲۷	۵۷	۷۴۵	۴۴۶	۳۹۱۱	۵۱۵۸
۸			۵۶۴۷	۹۵۱	۲۱	۱۳۶۸	۷۸۹	۴۲۶۰	۱۳۶۸
۹			۴۷۸۵	۶۴۳۶	۳۲	۱۰۹	۲۷۸	۱۶۹	۶۳
۱۰			۳۲۵۴	۴۴۲	۵۴	۸۸۶	۴۶۱	۳۴۴۴	۳۵۴۰
۱۱			۸۴۵۷	۶۹۳۲	۱۳	۴۲۹۴	۷۸۴	۳۸۵۰	۱۸۳۹
۱۲			۶۷۴۲	۹۴۳	۲۲	۴۷۰	۳۴۴	۱۶۴۱	۸۳۸

از آنجایی که تابع هدف مدل واقع‌نمایی بی‌معنی است، مقادیر مربوط به جریمه نشدنی بودن جهت مقایسه مدل قطعی و مدل استوار تحت ۱۰ واقع‌نمایی برای تمام جواب‌های پارتو در جدول ۵ آورده شده است. مطابق نتایج جدول ۵، همه جواب‌های بهینه پارتویی مدل استوار از نظر میانگین و انحراف معیار بهتر از جواب‌های مدل قطعی هستند. همچنین از جواب ۳ تا جواب ۵ میانگین و انحراف معیار بدتر شده است زیرا با توجه به مقادیر تابع هدف محاسبه شده تأثیر محدودیت OF<sub>2</sub> و OF<sub>3</sub> کاهش پیدا کرده است. از آنجایی که تابع هدف بهینگی استواری درصد کاهش حداکثر انحراف بردار جواب از جواب بهینه در (تقریباً) همه مقادیر ممکن برای پارامترهای غیرقطعی است، کاهش تأثیر OF<sub>2</sub> منجر به افزایش انحراف معیار می‌شود.

جدول ۵. جریمه نشدنی بودن مدل قطعی و استوار با ۱۰ واقع‌نمایی

πR <sub>l</sub> <sup>d</sup>									
واقع‌نمایی			مدل قطعی						
			مدل استوار						
			۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱ (اسمی)			-	-	-	-	-	-	-
۲ (خوش‌بینانه)			-	-	-	-	-	-	-

$$x_{j'mksp}^* + y_{ijksp}^* \leq 1 + h_{j'mijksp}^* \quad \forall j' \in J, m \in V_A, (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (93)$$

$$x_{j'mksp}^* + y_{ijksp}^* \geq 2 \cdot h_{j'mijksp}^* \quad \forall j' \in J, m \in V_A, (i, j) \in A, k \in K \quad (94)$$

$$\sum_{(i,j) \in R} d_{ijp}^{real} w_{ijj'p}^* + R_2^d \leq b_{j'p} \quad \forall j' \in J, p \in P \quad (95)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} t_{ijp} x_{ijksp}^* \leq T_{kp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (96)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} \beta_{ijk} x_{ijksp}^* \leq R_{kp} \quad \forall k \in K, p \in P \quad (97)$$

$$\Phi_{ijksp}^* - \rho_{ijksp}^* \leq M(1 - x_{ijksp}^*) \quad \forall (i, j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (98)$$

$$\rho_{ijksp}^* + t_{ij} - \Phi_{ijksp+1p}^* \leq M(1 - y_{ijksp}^*) \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (99)$$

$$\Phi_{ijksp+1p}^* - (\rho_{ijksp}^* + t_{ij}) \leq M(1 - y_{ijksp}^*) \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (100)$$

$$\rho_{ijksp}^* + t_{ij} - \Phi_{ijksp+1p}^* \leq M(1 - (x_{ijksp}^* - y_{ijksp}^*)) \quad \forall (i, j) \in \hat{A} \setminus A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (101)$$

$$\Phi_{ijksp+1p}^* - (\rho_{ijksp}^* + t_{ij}) \leq M(1 - (x_{ijksp}^* - y_{ijksp}^*)) \quad \forall (i, j) \in \hat{A} \setminus A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (102)$$

$$\rho_{ijksp}^* - \omega_{ijp}^* \leq M(1 - y_{ijksp}^*) \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (103)$$

$$\omega_{ijp}^* + t_{ij} - \rho_{ijksp}^* \leq M(1 - (x_{ijksp}^* - y_{ijksp}^*)) \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (104)$$

$$\Phi_{0k1p}^* = 0 \quad \forall k \in K, p \in P \quad (105)$$

$$\beta_{ijksp}^* - v_{ijksp}^* \leq M(1 - x_{ijksp}^*) \quad \forall (i, j) \in \hat{A}, k \in K, s \in S, p \in P \quad (106)$$

$$\beta_{ijksp}^* + d_{ijp}^{real} - v_{ijksp+1p}^* + R_3^d \leq M(1 - y_{ijksp}^*) \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (107)$$

$$v_{ijksp+1p}^* - (\beta_{ijksp}^* + d_{ijp}^{real}) + R_4^d \leq M(1 - y_{ijksp}^*) \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, s \in S, p \in P \quad (108)$$

$$v_{0ksp}^* = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S} d_{ijp}^{real} y_{ijksp}^* + R_5^d \quad \forall k \in K, p \in P \quad (109)$$

$$R_l^d \geq 0 \quad l = 1, 2, \dots, 5 \quad (110)$$

که در آن  $R_l^d$  متغیرهای تصمیم هستند که میزان انحراف محدودیت‌های مربوط تقاضا (یعنی محدودیت‌هایی که شامل پارامترهای غیردقیق هستند) در هر بار واقع‌نمایی تصادفی هستند.

به‌علاوه  $\pi$  هزینه واحد جریمه انحراف هستند. همچنین در ادامه محدودیت (۸۳) و (۸۴) مرتبط با تابع هدف دوم و سوم به‌ترتیب به‌صورت OF<sub>2</sub> و OF<sub>3</sub> نمایش داده می‌شوند. در این جا مدل قطعی

در محدودیت‌های (۴۷)، (۵۴)، (۶۸) و (۷۰) به تعداد ماکزیمم کمان‌های دارای تقاضای در دو دوره، پارامتر غیرقطعی وجود دارد پس به طور مثال برای مسئله اول از مسائل استاندارد  $F^{1,2,5,6} \in [0,10]$  است. البته  $F^i$  می‌تواند مقدار صحیح یا غیرصحیح بگیرد. جهت ارزیابی مدل استوار، مسئله ۲۲ از مسائل استاندارد در حال قطعی و استوار در ۴ سطح محافظه‌کاری مختلف و در هر سطح با ۴ حالت مختلف در عدم قطعیت، با داده‌های اسمی حل شده است. داده‌های اسمی پارامتر غیرقطعی (تقاضا) بر اساس داده‌های پیش‌بینی شده قبل از حل مسئله تعیین شده است. مقادیر توابع هدف و زمان محاسبه در حالت قطعی و استوار در جدول ۶ گزارش شده است. سپس مدل واقع‌نمایی ۱۰ بار حل شده است. به منظور تولید مقادیر تصادفی برای پارامترهای غیردقیق تقاضا از توزیع یکنواخت استفاده شده است. این اعداد تصادفی را بر اساس توزیع یکنواخت بین حدود بالا و پایین بازه تقاضا تولید می‌کند. متوسط مقادیر توابع هدف و انحراف معیار در این چهار تکرار نیز در جدول ۶ گزارش شده است. به دلیل افزایش تعداد محدودیت‌ها زمان حل در مدل استوار در مقایسه با مدل قطعی افزایش می‌یابد. مقایسه نتایج مدل استوار و قطعی در شرایط داده اسمی و داده واقع‌نمایی نشان می‌دهد که نتایج مدل استوار با اینکه در شرایط اسمی به نظر بدتر از مدل قطعی است اما در شرایط داده‌های واقع‌نمایی از لحاظ کیفیت و انحراف استاندارد راه‌حل‌های بهتری ارائه می‌دهد.

در شکل ۱ نتایج در سطوح محافظه‌کاری مختلف برای تابع هدف اول نشان داده شده است. مقایسه این نتایج نشان می‌دهد که مدل استوار در سطوح محافظه‌کاری بالاتر در مقابل مدل قطعی دارای عملکرد بهتری است و فاصله بین (میانگین و انحراف استاندارد) دو روش با افزایش سطح محافظه‌کاری افزایش می‌یابد. بنابراین نتایج بر این مسئله تأکید می‌کند که عدم توجه به عدم قطعیت ممکن است منجر به ایجاد زیان‌های ناشی از رخدادهای نامعلوم شود. نتایج برای سایر توابع هدف نیز از همین روند تبعیت می‌کند. مقایسه بین نتایج مقادیر مختلف عدم قطعیت در هر سطح محافظه‌کاری برای تابع هدف اول در شکل ۱ نشان می‌دهد که افزایش میزان عدم قطعیت در هر سطح از محافظه‌کاری منجر به افزایش هزینه‌ها می‌شود. نتایج برای سایر اهداف نیز از همین روند تبعیت می‌کند.

جدول ۵. جریمه نشدنی بودن مدل قطعی و استوار با ۱۰ واقع‌نمایی

		$\pi R_j^d$						
واقع‌نمایی	مدل قطعی	مدل استوار					۱	۲
		۳	۴	۵	۶	۷		
۳ (بدبینانه)	-	-	-	-	-	-	-	-
۴	۳۹۱۸	۵۳۷۸	۶۷	۸	۳۴	۴۲	۵۳	
۵	۱۰۴۹	۴۴۳۴	۳	۱۵	۳۱	۲۹	۹	
۶	۳۶۸۹	۵۲۸	۲۶	۶۴۱	۲۷۹	۱۳۹۲	۲۹۴	
۷	۴۲۶۶	۲۳۲۷	۵۷	۷۴۵	۴۴۶	۳۹۱۱	۵۱۵۸	
۸	۶۷۷۹	۹۵۱	۲۱	۱۳۶۸	۷۸۹	۴۲۶۰	۱۳۶۸	
۹	۶۶۶۸	۶۴۳۶	۳۲	۱۰۹	۲۷۸	۱۶۹	۶۳	
۱۰	۷۰۹۴	۴۴۲	۵۴	۸۸۶	۴۶۱	۳۴۴۴	۳۵۴۰	
۱۱	۱۵۳۳	۶۹۳۲	۱۳	۴۲۹۴	۷۸۴	۳۸۵۰	۱۸۳۹	
۱۲	۹۰۰۴	۹۴۳	۲۲	۴۷۰	۳۴۴	۱۶۴۱	۸۳۸	
میانگین	۴۸۸۹	۲۶۸۱	۶۴	۹۴۸	۳۸۳	۲۰۸۲	۱۴۶۲	
انحراف معیار	۲۶۷۷	۲۲۴۳	۲۲	۱۳۳۲	۲۷۵	۱۷۹۵	۱۸۰۱	

برای ارزیابی رویکرد برتسیماس و سیم برای استوارسازی مدل پیشنهادی، مسئله ۲۲ از مسائل استاندارد برای مدل قطعی و واقع‌نمایی برای هر خوشه تحت داده‌های اسمی حل شده است. لازم به ذکر است که در مدل استوار ۴ حالت  $\hat{d} = d$ ،  $\hat{d} = 0.2d$ ،  $\hat{d} = 0.4d$  و  $\hat{d} = 0.8d$  برای عدم قطعیت در پارامتر تقاضا با ۳ سطح مختلف محافظه‌کاری فرض می‌شود. برای تعیین حدود مجاز برای  $F^i$  برای تابع هدف و محدودیت‌ها نکات زیر در نظر گرفته شده است.

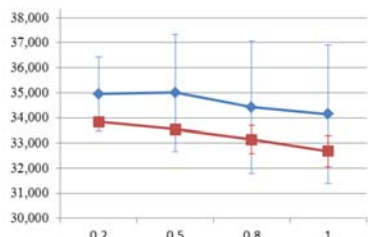
- برای تعیین میزان  $F^0$  ابتدا تعداد کل داده‌های غیرقطعی در تابع هدف محاسبه می‌شود.

بنابراین [مجموع تعداد کمان دارای تقاضا در هادوره،  $F^0 \in [0, \dots]$  خواهد بود.  $F^0$  لزوماً باید عدد صحیح باشد. در حالت کلی، مقادیر بالاتر  $F^0$ ، سطح محافظه‌کاری را در مقابل ریسک بیشتری (به دلیل حمل ماده بیشتر) که به ازای آن باید در تابع هدف سوم پرداخت کنیم بالا می‌برد. به طور مثال برای مسئله اول از مسائل نمونه  $F^0 \in [0,18]$  است.

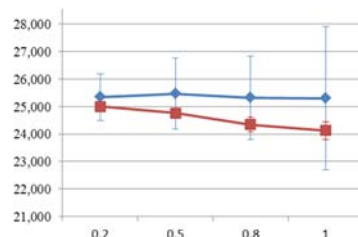
- برای تعیین میزان سطح محافظه‌کاری محدودیت‌های مسئله، از آنجاکه در محدودیت‌های (۶۴) و (۶۶) یک پارامتر غیرقطعی وجود دارد پس در هر مسئله‌ای  $F^{3,4} \in [0,1]$  است.

جدول ۶. نتایج اعتبارسنجی مدل LARP استوار

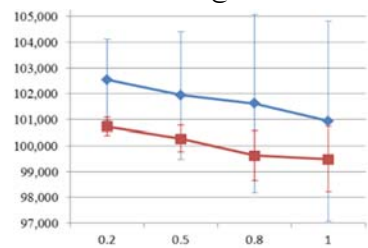
نتایج واقع‌نمایی												نتایج با داده اسمی								$\hat{d} = \alpha d$	$F^i$
S <sub>3</sub>		S <sub>2</sub>		S <sub>1</sub>		A <sub>3</sub>		A <sub>2</sub>		A <sub>1</sub>		T		O <sub>3</sub>		O <sub>2</sub>		O <sub>1</sub>			
R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D		
۲۰	۶۸	۵۵	۸۷	۶۱	۸۵۰	۸۳۲	۷۴۳	۶.۶۳۲	۶.۷۴۶	۲۵.۰۰۰	۲۵.۳۴۶	۱	۱	۸۲۴	۷۹۳	۶.۸۶۴	۶.۶۹۸	۲۵.۹۴۹	۲۵.۶۹۸	۰/۲	
۳۲	۱۵۴	۹۴	۱۶۸	۱۲۵	۱.۲۹۲	۸۱۰	۸۵۸	۶.۳۳۴	۶.۳۸۷	۲۴.۷۵۷	۲۵.۴۶۹	۱/۲		۸۶۵		۷.۱۰۶		۲۶.۱۰۶		۰/۵	$F^0 = 1$
۴۵	۲۳۵	۱۴۸	۲۳۱	۲۶۷	۱.۵۱۵	۷۸۴	۸۷۵	۶.۱۷۸	۶.۸۳۲	۲۴.۳۴۸	۲۵.۳۲۶	۱/۴۵		۸۷۶		۷.۴۳۰		۲۶.۴۳۰		۰/۸	$F^{1,2,5,6} = 1$
۷۴	۳۷۸	۲۲۰	۲۹۷	۳۲۴	۲.۶۰۲	۷۶۳	۹۶۴	۶.۰۰۶	۶.۹۲۰	۲۴.۱۳۰	۲۵.۲۹۸	۱/۶		۸۹۵		۷.۹۵۷		۲۶.۹۵۷		۱	$F^{3,4} = 1$
۶۳	۱۴۷	۹۷	۲۲۵	۱۸۳	۱.۴۷۸	۹۰۳	۹۲۴	۸.۴۳۲	۸.۷۸۳	۳۳.۸۳۸	۳۴.۹۵۱	۷.۶۸۰	۵.۷۲۰	۹۳۵	۹۰۸	۸.۹۴۲	۸.۵۹۸	۳۴.۲۴۶	۳۲.۴۷۸	۰/۲	$F^0 = 1$
۸۶	۲۳۹	۱۳۵	۳۳۶	۲۰۹	۲.۳۴۶	۸۷۴	۹۶۷	۸.۲۴۶	۹.۴۳۴	۳۳.۵۴۲	۳۴.۹۹۷	۷.۸۲۵		۹۷۴		۹.۱۲۷		۳۴.۸۸۴		۰/۵	$F^{1,2,5,6} = 1$
۱۲۲	۴۳۷	۱۶۹	۵۹۴	۵۵۸	۲.۶۲۹	۸۵۱	۱.۴۲۳	۸.۰۱۲	۹.۹۵۰	۳۳.۱۳۹	۳۴.۴۲۳	۸.۰۷۸		۹۹۵		۹.۳۰۳		۳۵.۴۳۵		۰/۸	$F^{3,4} = 3$
۱۳۶	۵۸۴	۲۴۷	۷۸۴	۶۳۰	۲.۷۶۲	۸۳۰	۱.۱۳۶	۷.۷۵۴	۱۰.۲۳۰	۳۲.۶۷۸	۳۴.۱۳۶	۸.۲۳۴		۱.۰۴۰		۹.۴۶۵		۳۶.۱۰۳		۱	$F^{3,4} = 0.4$
۶۹	۳۴۵	۸۴	۴۲۱	۲۳۶	۱.۳۲۵	۹۵۰	۹۷۳	۹.۲۷۰	۹.۳۲۱	۶۵.۸۷۰	۶۷.۴۴۳	۱۰.۹۰۸۰	۹۱.۸۰۶	۹۸۷	۹۴۲	۹.۴۹۱	۹.۶۵۸	۶۹.۵۱۴	۶۵.۴۲۱	۰/۲	$F^0 = 1$
۹۴	۴۹۲	۱۶۵	۶۴۲	۳۶۴	۱.۸۳۹	۹۴۳	۱.۶۵۳	۹.۵۰۶	۹.۵۴۷	۶۵.۵۴۲	۶۶.۸۴۷	۱۰.۹۸۲۵		۱.۲۲۴		۱۰.۲۳۸		۶۹.۹۲۶		۰/۵	$F^{1,2,5,6} = 1$
۱۳۲	۵۷۳	۱۹۸	۸۸۹	۶۴۷	۲.۳۲۳	۹۰۰	۱.۸۴۲	۸.۸۷۳	۱۰.۶۵۳	۶۵.۳۷۳	۶۶.۶۲۳	۱۱۰.۶۳۴		۱.۳۵۴		۱۰.۶۵۴		۷۰.۵۸۳		۰/۸	$F^{3,4} = 7$
۱۶۴	۶۸۹	۲۳۱	۳۰۲	۸۳۲	۲.۹۰۵	۸۴۲	۲.۴۲۰	۸.۵۱۷	۱۰.۷۲۰	۶۵.۱۱۷	۶۵.۸۵۶	۱۱۰.۷۹۸		۱.۶۷۸		۱۱.۴۵۰		۷۱.۰۴۷		۱	$F^{3,4} = 0.8$
۷۵	۳۶۹	۱۳۶	۶۳۴	۳۶۸	۱.۵۷۸	۱.۵۸۷	۱.۴۶۵	۱۱.۸۸۷	۱۱.۵۴۷	۱۰۰.۷۴۰	۱۰۲.۵۴۷	۱۹۸.۰۱۲	۱۸۰.۶۵۰	۱.۷۰۶	۱.۳۳۶	۱۱.۹۵۴	۱۱.۷۳۶	۱۶۴.۰۳۹	۹۹.۷۳۶	۰/۲	$F^0 = 1$
۹۷	۵۰۱	۱۵۴	۹۵۰	۵۰۹	۲.۴۷۶	۱.۳۲۴	۱.۷۳۶	۱۱.۶۳۴	۱۱.۷۴۰	۱۰۰.۲۷۳	۱۰۱.۹۴۰	۱۹۸.۸۵۴		۱.۹۷۴		۱۲.۸۷۷		۱۷۵.۹۸۶		۰/۵	$F^{1,2,5,6} = 1$
۱۶۲	۶۷۸	۲۶۲	۱۳۴۷	۹۵۸	۳.۴۴۹	۲.۷۳۲	۳.۳۴۱	۱۱.۵۷۳	۱۲.۳۲۱	۹۹.۶۲۴	۱۰۱.۶۲۱	۱۹۹.۴۶۲		۲.۶۴۵		۱۳.۳۶۲		۱۸۸.۶۳۴		۰/۸	$F^{3,4} = 10$
۱۹۰	۷۱۱	۳۰۰	۱۶۳۲	۲.۶۰۳	۳.۸۶۲	۱.۱۷۲	۶.۲۳۱	۱۱.۱۷۲	۱۲.۶۲۳	۹۹.۴۸۰	۱۰۰.۹۴۱	۱۹۹.۹۰۰		۲.۸۶۹		۱۳.۷۸۰		۱۹۷.۱۱۲		۱	$F^{3,4} = 1$



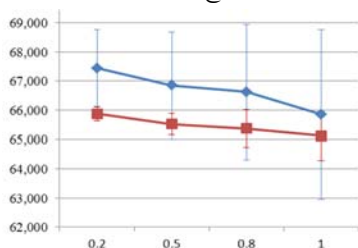
ب- سطح محافظه‌کاری ۲



الف- سطح محافظه‌کاری ۱



د- سطح محافظه‌کاری ۴



ج- سطح محافظه‌کاری ۳

■ Robust

◆ Deterministic

شکل ۱. مقایسه نتایج در سطوح محافظه‌کاری مختلف برای تابع هدف اول

## ۵- نتیجه گیری

فرآیند تأمین وجوه نقد برای شعب یک بانک در سطح کل کشور به دلیل مسائل امنیتی حمل و نقل پول، مسائل مرتبط با مدیریت بهینه نقدینگی، پراکندگی بالای شعب در کشور یک مسئله کلیدی است. در این مقاله مدل برنامه ریزی ریاضی غیرخطی مختلط دوهدفه چنددوره‌ای با پنجره زمانی مبتنی بر کاهش ریسک سرقت کالاهای ارزشمند برای مدل‌سازی مسئله مکان‌یابی-مسیریابی کمان‌محور خزانه‌های یک بانک مورد استفاده شده است. اعتبار مدل پیشنهادی ارائه شده برای ۲۲ مسئله از مسائل استاندارد با روش E-محدودیت، بررسی و تأیید شده است. مدل استوار نیز با استفاده از مدل واقع‌نمایی اعتبارسنجی استفاده شده است. مدل پیشنهادی برای حمل کالاهای ارزشمند طراحی شده است بنابراین با تغییر تابع هدف و محدودیت‌های ریسک می‌توان آن را برای حوزه‌های دیگر نیز به کار برد. همچنین بررسی مدل در شرایط عدم قطعیت، به کارگیری روش‌های حل دقیق مانند روش شاخه و کران مسائلی است که در تحقیقات آتی می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.

## ۶- پی‌نوشت‌ها

1. Node-based Problem
2. Arc-based Problem
3. Traveling Salesman Problem
4. Vehicle Routing Problem
5. Chinese Postman Problem
6. Rural Postman Problem
7. Capacitated ARP
8. Rural Postman Problem (RPP)
9. Location ARP
10. Edge
11. Deadheading Arc
12. Realization Model

## ۷- مراجع

- مطالعه موردی. فصلنامه مهندسی حمل و نقل، سال ۷، شماره ۲، ۲۹۶-۲۷۷.
- صنیع‌آبادی، محمد و جیل‌عاملیان، زهره، (۱۳۹۴). الگوریتم‌های تکاملی و محاسبات زیستی. انتشارات نیاز دانش، چاپ اول.
- کهنی، عاطفه، برزین‌پور، فرناز، توکلی‌مقدم، رضا (۱۳۹۱). توسعه الگوریتم بهینه‌سازی انبوه ذرات جهت حل مدل یکپارچه برنامه‌ریزی تولید و سیستم تولید سلولی پویا. نشریه مهندسی صنایع، شماره ۴۶، ۸۹-۷۷.
- کهنی، عاطفه و توکلی‌مقدم، رضا (۱۳۹۳). حل مدل مسیریابی وسایل نقلیه چندانباره مبتنی بر کاهش ریسک با استفاده از یک الگوریتم خفاش چندهدفه. فصلنامه مهندسی حمل و نقل، شماره ۶، ۵۲۲-۵۰۷.
- کهنی، عاطفه، سیدحسینی، سید محمد و توکلی‌مقدم، رضا (۱۳۹۶). مسائل مکان‌یابی-مسیریابی: مروری بر مفاهیم، مدل‌ها، روش‌های حل، کاربردها و شکاف‌های تحقیقاتی. نشریه تخصصی مهندسی صنایع، شماره ۵۱، ۲۵۰-۲۲۳.
- کهنی، عاطفه، سیدحسینی، سید محمد و توکلی‌مقدم، رضا (انتشار آنلاین از تاریخ ۲۴ آبان ۱۳۹۷). حل مدل دوهدفه جدید برای مسئله مکان‌یابی-مسیریابی کمان‌محور چند دوره‌ای با پنجره زمانی مبتنی بر کاهش ریسک سرقت کالای ارزشمند (مطالعه موردی خزانه بانک). فصلنامه مهندسی حمل و نقل، مقالات آماده انتشار، پذیرفته شده.
- Albareda-Sambola, M., (2015). Location-routing and location-arc routing. in, *Location Science*, Springer.
- Amini, A., Tavakkoli-Moghaddam, R., and Ebrahimnejad, S., (2017). Scenario-Based Location Arc Routing Problems: Introducing Mathematical Models. In *International Conference on Management Science and Engineering Management*, Springer, 511-521.
- Black, D., Eglese, R., and Wöhlk, S., (2013). The time-dependent prize-collecting arc routing problem. *Computers & Operations Research*, Vol. 40, No. 2, 526-535.
- Çetinkaya, C., Gökçen, H., and Karaoğlan, İ., (2018). The location routing problem with arc time windows for terror regions: a mixed integer formulation. *Journal of Industrial and Production Engineering*, No., 1-10.
- Çetinkaya, C., Karaoğlan, I., and Gökçen, H., (2013). Two-stage vehicle routing problem with arc time windows: A mixed integer programming formulation and a heuristic approach. *European Journal of Operational Research*, Vol. 230, No. 3, 539-550.
- جلیلی‌بال، الهام، توکلی‌مقدم، رضا و جوانشیر، حسن (۱۳۹۶). توسعه مدل ریاضی چندهدفه برای مسئله مسیریابی وسایل نقلیه جهت حمل مواد سوختی با در نظر گرفتن پنجره زمانی و عوامل زیست محیطی. مهندسی حمل و نقل، سال ۸، شماره ۳، ۳۵۴-۳۴۳.
- علینقیان، مهدی، صباغ، محمدسعید. و بابایی تیرکلایی، عرفان، (۱۳۹۵). مسئله مسیریابی کمان ظرفیتدار با تقاضای فازی به همراه

- Lopes, R.B., Plastria, F., Ferreira, C., and Santos, B.S., (2014). Location-arc routing problem: Heuristic approaches and test instances. *Computers & Operations Research*. Vol. 43, 309-317.
- Lystlund, L., and Wöhlk, S., (2012). The service-time restricted capacitated arc routing problem.
- Mirjalili, S., (2016). Dragonfly algorithm: a new meta-heuristic optimization technique for solving single-objective, discrete, and multi-objective problems. *Neural Computing and Applications*, Vol. 27, No. 4, 1053-1073.
- Raquel, C.R., and Naval Jr, P.C., (2005). An effective use of crowding distance in multiobjective particle swarm optimization. *In Proceedings of the 7th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, ACM., 257-264.
- Riquelme-Rodríguez, J.-P., Gamache, M., and Langevin, A., (2016). Location arc routing problem with inventory constraints. *Computers & Operations Research*, Vol. 76, 84-94.
- Talarico, L., Sörensen, K., and Springael, J., (2015). Metaheuristics for the risk-constrained cash-in-transit vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, Vol. 244, No. 2, 457-470.
- Talarico, L., Sörensen, K., and Springael, J., (2017). A biobjective decision model to increase security and reduce travel costs in the cash-in-transit sector. *International Transactions in Operational Research*, Vol. 24, No. 1-2, 59-76.
- Talarico, L., Sörensen, K., and Springael, J., (2013). The risk-constrained cash-in-transit vehicle routing problem with time window constraints. *In 14th Workshop of the EURO Working Group "EU/ME: the Metaheuristics Community*. Hamburg, Germany, 104-109.
- Tavakkoli-Moghaddam, R., Amini, A., and Ebrahimnejad, S., (2018). A new mathematical model for a multi-product location-arc routing problem. *In Optimization and Applications (ICOA)*, 2018 4th International Conference on, 1-5. IEEE.
- Vansteenwegen, P., Souffriau, W., and Sörensen, K., (2010). Solving the mobile mapping van problem: A hybrid metaheuristic for capacitated arc routing with soft time windows. *Computers & Operations Research*, Vol. 37, No. 11, 1870-1876.
- Vincent, F.Y., and Lin, S. W., (2015). Iterated greedy heuristic for the time-dependent prize-collecting arc routing problem. *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 90, No.2, 54-66.
- www.mathworks.com/matlabcentral.
- Yang, X. S., (2010). A new metaheuristic bat-inspired algorithm. *In, Nature inspired cooperative strategies for optimization (NICSO 2010) (Springer)*.
- Chankong, V., and Haimes, Y.Y., (2008). Multiobjective decision making: theory and methodology (Courier Dover Publications).
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T., (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 6, No. 2, 182-197.
- DoT, U., (1996). Highway routing of hazardous materials guidelines for applying criteria. Washington DC. *National Highway Institute*.
- Doulabi, S.H.H., and Seifi, A., (2013). Lower and upper bounds for location-arc routing problems with vehicle capacity constraints. *European Journal of Operational Research*, Vol. 224, No. 1, 189-208.
- Essink, E., and Wagelmans, A., (2015). A comparison of 3 metaheuristics for the location-arc routing problem.
- Ghiani, G., Improta, G., and Laporte, G., (2001). The capacitated arc routing problem with intermediate facilities. *Networks*, Vol. 37, No. 3, 134-143.
- Ghiani, G., and Laporte, G., (2001). Location-arc routing problems. *Opsearch*, Vol. 38, No. 2, 151-159.
- Golden, B.L., and Wong, R.T., (1981), Capacitated arc routing problems. *Networks*, Vol. 11, No. 3, 305-315.
- <http://www.alimirjalili.com>
- Huber, S. (2016). Strategic decision support for the bi-objective location-arc routing problem. *In Proceedings of the 2016 49th Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS)*. IEEE Computer Society. 1407-1416.
- Kennedy, J., (1995). Particle swarm optimization. *In Proc. of IEEE Int. Conf. Neural Networks*, (Perth, Australia), Nov. 27-Dec., 1942-1948.
- Kirlik, G., and Sipahioglu, A., (2012). Capacitated arc routing problem with deadheading demands. *Computers & Operations Research*, Vol. 39, No. 10, 2380-2394.
- Lacomme, P., Prins, C., and Ramdane-Cherif, W., (2004). Competitive memetic algorithms for arc routing problems. *Annals of Operations Research*, Vol. 131, No. 1-4, 159-185.
- Levy, L., and Bodin, L., (1989). The arc oriented location routing problem. *INFOR :Information Systems and Operational Research*. Vol. 27, No. 1, 74-94.
- Liu, T., Jiang, Z., Chen, F., Liu, R., and Liu, S., (2008). Combined location-arc routing problems: a survey and suggestions for future research. *In Service Operations and Logistics, and Informatics, IEEE/SOLI 2008. IEEE International Conference on*, 2336-2341.

# Multi-objective Robust Optimization for a Location-Arc Routing Problem

*Atefeh Kahfi, Ph.D., Grad., Department of Industrial Engineering,  
College of Engineering, University of Payame Noor, Tehran, Iran.  
Seyed Mohammad Seyed Hosseini, Professor, School of Industrial Engineering,  
Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.  
Reza Tavakkoli-Moghaddam, Professor, School of Industrial Engineering,  
College of Engineering, University of Tehran, Iran.*

*E-mail: tavakoli@ut.ac.ir*

Received: November 2024- Accepted: February 2025

## **ABSTRACT**

In location-arc routing problems, unlike the well-known locating-routing problems, demand is on the arc and using deadheading arcs is permitted. Few studies have focused on this issue. In this research, a three-objective complex linear mathematical model for the multi-period location-arc routing problem under uncertainty with the time window is presented. The objectives of the model are included in the minimization of cost, cash-in-transit, and vehicle waiting time. The time window, minimizing cash-in-transit, and definition threshold for routes risk based on safety indicators, reduces the transportation risk indirectly. The proposed model is based on Bertsimas and Sim model and the  $\epsilon$ -constraint method is used to solve 22 standard problems based on the proposed model. In addition, the robust model is validated with the realization model. The results show that the robust model versus deterministic model has better performs at higher conservatism levels and increases the uncertainty at each level of conservatism leading to higher costs.

**Keywords:** Three-Objective Location-Arc Routing Problem, Robust Optimization,  $\epsilon$ -Constraint, Time Windows, Risk