مدل سازی و تحلیل سه دال تخت متصل بهم دیوار حائل سبک‌سازی شده جدید بر پایه اصول ریاضی

مقاله علمی-پژوهشی

*علی مجیدپورخوئی (نویسنده مسئول)، گروه مهندسی عمران، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران
*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: amajidpour@tvu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۲۴- پذیرش: ۱۴۰۵/۰۸/۰۵
صفحه ۳۱۲-۲۹۹

چکیده

کاربرد گسترده ساختارهای صفحه‌ای در پروژه‌های عمرانی به دلیل سبکی، استحکام و صرفه‌جویی اقتصادی، اهمیت استفاده از آنها را دو چندان می‌کند. در این پژوهش برای کاهش سیر صعودی ضخامت دیوارهای حائل وزنی بتنی و به تبع آن کاهش سیر صعودی مصالح مصرفی به ازای افزایش ارتفاع دیوار، دال های مسطح با دیوارهای حائل وزنی بتنی تطبیق گردیده و یک نوع دیوار حائل سبک سازی شده جدید پیشنهاد گردیده است، سپس تلاش شده تا بنیان نظریه صفحات و جنبه های فیزیکی و ریاضی مباحث و کاربرد آن در مطالعات انجام شده برای دیوار حائل جدید مهیا شده و معادلات حاکم برای حالت مسئله پیشنهاد شده، ارائه شود. نتایج نشان می‌هد که دیوار حائل جدید، از نظر مصرف بتن به طور قابل توجهی مقرون به صرفه خواهد بود. بطور کلی در این پژوهش روش جدیدی بر پایه اصول ریاضی برای محاسبه و آنالیز دیوار حائل سبک سازی شده مرکب از دال‌های تخت ارائه گردیده است.

واژه‌های کلیدی: دیوارهای حائل وزنی بتنی، دال‌های تخت، دیوار حائل سبک سازی شده، تحلیل صفحه‌ها

۱- مقدمه

در هنگام طراحی، شناخت رفتار دیوارهای حائل و انتخاب بهترین و اقتصادی ترین طرح و منطقی ترین شکل و خصوصیات لازم برای آنها مهمترین مشکل و نگرانی مهندسین طراح می باشد. از اینرو شناخت عوامل اصلی تاثیرگذار بر هزینه ساخت و اجرای دیوار و تاثیر محدودیت‌ها بر با صرفه تر شدن یک نوع دیوار نسبت به نوع دیگر می تواند کمک مناسبی باشد و شایسته بررسی‌های مفصل و همه جانبه بوده تا اقتصادی‌ترین و از نظر فنی مناسب ترین طرح بدست آید. در این تحقیق، برای کاهش مصالح مصرفی دیوارهای حائل وزنی بتنی موجود، یک فرم سازه ای جدید ارائه گردیده است. سپس روش جدیدی برای محاسبه و آنالیز دیوار حائل پیشنهادی ارائه شده است. در این مقاله تلاش شده تا بر اساس نظریه صفحات و با در نظر گرفتن جنبه های فیزیکی و ریاضی مسئله، معادلات حاکم بر سازه جدید، ارائه شود. در حل مسئله دیوار حائل سبک سازی شده و تشکیل شده از سه دال مسطح از اصول ترکیبی مکانیک مهندسی و روش ریاضی استفاده شده و مسئله حل گردیده است. پیچیدگی و شرایط سخت حل نظری و ریاضی مسئله‌های مهندسی و از طرفی توسعه نرم افزارهای رایانه ای در عصر حاضر و سهولت استفاده از آنها در تحلیل مسائل سازه ای، تمایل و توجه متخصصان به محاسبات دقیق پایه ای و نظری بر مبنای اصول فنی و ریاضی را روز به روز کمتر نموده و زمینه یادگیری‌های سطحی و ظاهری را فراهم نموده است. فعالیت‌های متعدد پژوهشی و تخصصی نویسنده این مقاله در زمینه حل نظری مسئله‌های ابنیه راه علی الخصوص سازه‌های نگهبان و دیوارهای حائل، بیانگر توجه نویسنده به اهمیت حل دقیق ریاضی و نظری بوده تا زیربنای

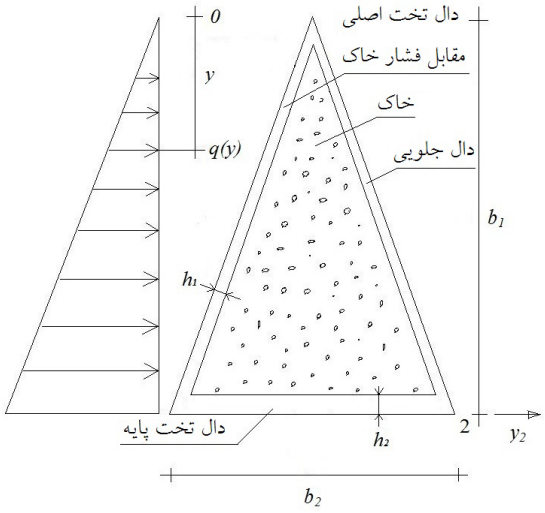
ساختاری مستحکم و دقیقی را برای یادگیری و تحلیل مسئله‌ها فراهم و زمینه را برای فعالیت‌ها و مطالعات آتی در این خصوص مهیا نماید. مطالعات زیادی توسط نویسنده این مقاله بر روی سازه نگهبان جدید تشکیل شده از سه پوسته استوانه‌ای (Majidpourkhoei, 2025)، مروری بر توسعه نظریه‌ها و روش‌های آنالیز پوسته‌ها (Majidpourkhoei, 2024)، محاسبه پایداری و تناسبات هندسی دیوار حائل جدید تشکیل شده از پوسته‌های استوانه‌ای مرکب (Majidpourkhoei, 2024)، کاربرد پوسته‌ها در کالبد شهرها (Majidpourkhoei, 2024)، ارائه دیوارهای حائل پوسته‌ای جدید جهت ساماندهی روش‌های پایدارسازی ترانشه‌های معابر شهری (Majidpourkhoei, 2015)، تطبیق پوسته استوانه‌ای مخازن با دیوارهای حائل طره‌ای پایه دار (Majidpourkhoei, 2015)، انجام شده است. همچنین مطالعاتی توسط برخی از پژوهشگران در زمینه انواع مختلف دیوارهای حائل انجام شده است (Apipah et al, 2025; Pham et al, 2025; Rhayma et al, 2025; Rusadi et al, 2025; Yang et al, 2026). لیکن نتایج مطالعات در خصوص سبک سازی دیوارهای حائل وزنی بتنی به شکل و فرم پیشنهاد شده، برای اولین بار در این مقاله ارائه می‌شود.

فرضیات اصلی در مهندسی صفحات اولین بار توسط لاو بیان شده که این فرضیات تحت عنوان فرضیات کیرشف و لاو شهرت دارند. از دهه ۱۸۰۰ به بعد چندین حالت در مسائل صفحات توسط نویر، گراشف، لوی، ولاسف، دروکر، پراگر، خایدوکف، ارخوف، تیموشنکو و روشهای عددی توسط گالرکین، وال، کورانت، بوئینگ، کلاو، زینگیویچ، چئونگ و دیگران مطالعه شده اند. متون مربوط به تحلیل صفحه‌ها متعدد می باشند، تعدادی از متون مطالعه شده در این خصوص در بخش منابع آورده شده است (Ciarlet, 2022; Gohnert, 2022; Mittelstedt, 2023; Timoshenko et al, 1959; Ugural, 1981).

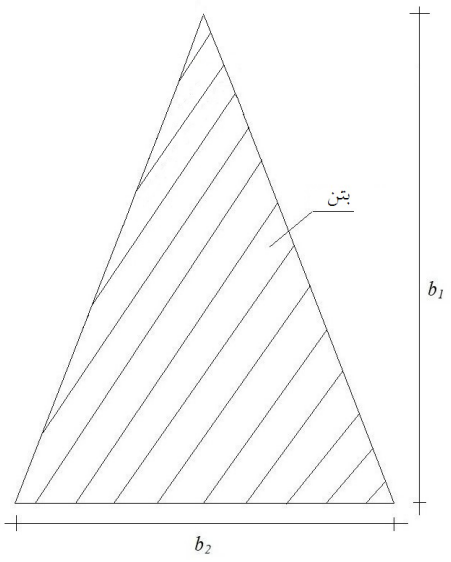
در بخش بعدی، برای کاهش حجم بتن مصرفی به ازای افزایش ارتفاع دیوار، دال‌های تخت با دیوارهای حائل وزنی بتنی تطبیق گردیده و یک نوع دیوار حائل سبک سازی شده جدید پیشنهاد گردیده است.

۲-دیوار حائل سبک سازی شده جدید

در این بخش در جهت سبک سازی دیوارهای حائل وزنی بتنی، یک نوع فرم سازه ای جدید مطابق شکل ۱ پیشنهاد گردیده است. همچنین بر اساس مقدار بتن مصرفی، شرط با صرفه بودن انتخاب آن مورد توجه قرار گرفته است.



شکل ۱. دیوار حائل جدید مرکب از دال‌های تخت



شکل ۲. دیوار حائل وزنی بتنی

در این مقاله تناسبات عمومی دیوار حائل پیشنهاد شده، مشابه دیوار حائل وزنی بتنی در نظر گرفته شده است (شکل ۲). ماهیت دیوار حائل جدید از نظر مسائل ژئوتکنیکی و عملکرد کلی سیستم مشابه دیوارهای حائل وزنی بتنی است. همچنین $b_2=0.7b_1$ پیشنهاد شده است (b_2 عرض مقطع دیوار و b_1 ارتفاع دیوار می‌باشد).

همانطوری که در شکل ۱ نشان داده شده است اگر فضای داخلی دیوارهای حائل وزنی بتنی را خالی در نظر گرفته و جداره‌های دیوار حائل وزنی بتنی دال‌های مسطح فرض شود و برای افزایش پایداری، فضای خالی با خاک پر شود، دیوار حائل بدست آمده باعث صرفه جوئی مقدار قابل توجهی در مصرف بتن می‌شود. بررسی‌ها نشان

می‌دهد که استفاده از دیوار حائل تشکیل شده از سه دال تخت، نسبت به دیوارهای حائل وزنی بتنی موجود باعث صرفه جوئی حدود ۹۰ درصد در مصرف بتن شده است. برای رسیدن به این منظور اگر سطح بتن مصرفی دیوار حائل وزنی بتنی بطور تقریبی $0.5b_1b_2$ در نظر گرفته شود. این میزان در دیوار حائل جدید $0.04b_1b_2$ خواهد بود. لذا استفاده از دیوار حائل جدید مقرون به صرفه تر خواهد بود.

با توجه به اینکه حداکثر ارتفاع اقتصادی برای دیوارهای حائل وزنی بتنی در حدود سه الی چهار متر است. برای مقایسه حجم بتن مصرفی دیوارهای حائل مذکور ارتفاع دیوار بین ۲ الی ٤ متر منظور شده است. بر این اساس مقادیر بدست آمده برای حجم بتن مصرفی دیوارهای حائل به ازای ارتفاعات مختلف در جدول ۱ مقایسه شده است. از بررسی جدول ۱ می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از دیوار حائل پیشنهادی جدید نسبت به دیوار حائل وزنی بتنی باعث صرفه جویی حدود ۹۰ درصد در مصرف بتن می‌شود.

جدول ۱. مقایسه حجم بتن مصرفی دیوارهای حائل

ارتفاع دیوار (متر) / حجم بتن به ازای یک متر طول دیوار (متر مکعب)	دیوار حائل وزنی بتنی موجود	دیوار حائل پیشنهادی جدید مرکب از دال های تخت
۲,۰۰	۱,٤۰	۰,۱۱۲
۲,۲۵	۱,۷۷	۰,۱٤۲
۲,۵۰	۲,۱۸۷	۰,۱۷۵
۲,۷۵	۲,٦٤۷	۰,۲۱۲
۳,۰۰	۳,۱۵	۰,۲۵۲
۳,۲۵	۳,٦۹۷	۰,۲۹٦
۳,۵۰	٤,۲۸۷	۰,۳٤۳
۳,۷۵	٤,۹۲	۰,۳۹٤
٤,۰۰	۵,٦۰	۰,٤٤۸

۳-حل مسئله دیوار حائل جدید مرکب از دال‌های تخت

در حل دیوار حائل جدید و تشکیل شده از سه دال تخت از اصول ترکیبی مکانیک مهندسی و ریاضیات استفاده شده و مسئله حل گردیده است. در این حالت مطابق شکل ۱ برای المان باربر اصلی مقابل فشار فعال خاک، المان زیرین نشسته بر روی بستر الاستیک و المان نگهدارنده جلویی، دال مستطیل شکل در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیل دال‌های مستطیلی شکل مانند زیر تعیین می شوند. معادله دیفرانسیل دال اصلی مانند زیر نوشته می‌شود.

$$D_1 \Delta^2 w_1 = q(y) \qquad (۱)$$

معادله دیفرانسیل دال زیرین نیز مانند زیر نوشته می‌شود.

$$D_2\Delta^2 w_2 + K \cdot w_2 - K_s\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right) = q^*(y) \qquad (۲)$$

که در آنجا D_1 و D_2 به ترتیب صلبیت خمشی دال اصلی و زیرین می‌باشند.

$$D_1 = \frac{Eh_1^3}{12\left(1-\upsilon^2\right)} \qquad (۳)$$

(٤)

$$D_2 = \frac{Eh_2^3}{12\left(1-\upsilon^2\right)}$$

شروط اتصال در محل خطوط بهم پیوستگی دال‌های اصلی و زیرین $y_1=b_1$ و $y_2=0$ مانند زیر قبول می‌شوند.

$$w_1(b) = w_2(b) = 0 \qquad (۵)$$

(٦)

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=b_1} - \left.\frac{\partial w_2}{\partial y}\right|_{y_2=0} = 0$$

(۷)

$$C\left.\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2\,\partial y}\right|_{y=b} = D_1\left.\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}+\upsilon\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)\right|_{y_1=b} - D_2\left.\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}+\upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right|_{y_2=0}$$

که در آنجا C سختی پیچشی المان مقاوم در محل خطوط بهم پیوستگی دال‌ها است. سختی خمشی المان‌های مقاوم در محل اتصال دال‌ها خیلی زیاد در نظر گرفته شده است ($B=\infty$) که این نیز باعث صفر شدن خمش در محل خطوط بهم پیوستگی دال‌ها می‌شود.

سختی پیچشی محل خطوط اتصال دال‌ها نیز بینهایت زیاد در نظر گرفته می شود که در اینصورت شروط اتصال ساده‌تر می‌شوند. شرایط مرزی در این حالت در محل $y_1=b_1$ برای دال اصلی مانند زیر بدست می‌آیند.

(۸)

$$w_1(b)=0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y_1=b}=0$$

همچنین شرایط مرزی در محل $y_2=0$ برای دال تخت زیرین مانند زیر نوشته می‌شوند.

(۹)

$$w_2(0)=0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial w_2}{\partial y}\right|_{y_2=0}=0$$

توابع خمیدگی برای تعیین حل مناسب مسئله با در نظر گرفتن شروط اتصال و مرزی فوق الذکر مانند زیر بدست می‌آیند. برای دال اصلی خواهیم داشت.

$$w_1=\sum_m\sum_n B_{mn}^{(1)}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y+ +\frac{1}{D_1}\left[F(y_1)N_m-\overline{N}_m\overline{F}(y_1)\right]\sin\lambda_m x \qquad (۱۰)$$

برای دال زیرین نیز مانند زیر نوشته می‌شود.

$$w_2=\sum_m\sum_n B_{mn}^{(2)}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y+ +\frac{1}{D_2}\left[F(y_2)N_m^*-\overline{N}_m^*\overline{F}(y_2)\right]\sin\lambda_m x \qquad (۱۱)$$

که در آنجا:

$$F(y_1)=\frac{b_1^2}{6}\left(y_{b_1}^3-3y_{b_1}^2+2y_{b1}\right)$$

$$\overline{F}(y_1)=\frac{b_1^2}{6}\left(y_{b_1}^3-y_{b1}\right)$$

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{a} \quad ; \quad y_{b_1}=\frac{y_1}{b_1} \quad ; \quad y_{b_2}=\frac{y_2}{b_2}$$

بنابراین با در نظر گرفتن ضرایب سری‌های بکار رفته در حل مسئله، برای دال اصلی مستطیلی شکل، حل معادله دیفرانسیل شماره ۱ مانند زیر نوشته می‌شود.

$$q(y)=q_o\cdot\frac{y_1}{b_1} \qquad (۱۲)$$

$$B_{mn}^{(1)}=-\frac{8\,q_o(-1)^n}{mn\pi^2 D_1\Delta_{mn}^2}-E_2(m_1n)\left[N_m-(-1)^n\overline{N}_m\right] \qquad (۱۳)$$

که در آنجا:

$m=1,3,5,\ldots$

$n=1,2,3,\ldots.$

به همین ترتیب، حل معادله دیفرانسیل شماره ۲ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$q_2(y)=q_1\left(1-\frac{y_2}{b_2}\right) \qquad (۱۴)$$

(۱۵)

$$B_{mn}^{(2)}=-\frac{8\,q_1(-1)^n}{mn\pi^2\cdot D_2\cdot\overline{D}^*(m_1n)}-E_2^*(m_1n)\left[N_m^*-(-1)^n\overline{N}_m^*\right]$$

که در آنجا:

$m=1,3,5,\ldots$

$n=1,2,3,\ldots.$

علائم و نشانه‌های بکار رفته در محاسبات فوق به صورت زیر می‌باشند.

$$\Delta_{mn}^2=\left(\lambda_m^2+\mu_m^2\right)^2 \quad ; \quad \mu_n=\frac{n\pi}{b_1} \quad ; \quad \lambda_m=\frac{m\pi}{a}$$

$$D^*(m,n)=\Delta_{mn}^2+\frac{K}{D_1}+\frac{K_s}{D_1}\Delta_{mn}$$

$$\overline{D}^*(m,n)=\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2\left[1+\frac{K}{D_2}\cdot\frac{1}{\Delta_{mn}^2}+\frac{K_s}{D_2}\cdot\frac{1}{\Delta_{mn}}\right]$$

$$E_2(m,n)=\frac{2\,\lambda_m^2}{n\,\pi\,D_1\Delta_{mn}^2}\left(2+\frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2}\right)$$

$$E_2^*(m,n)=\frac{2\,\lambda_m^2}{n\,\pi\,D^*(m,n)}\left[2+\frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2}+\frac{K}{D_2\mu_n^2\lambda_m^2}+\frac{K_s}{D_2\mu_n^2}\left(1+\frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2}\right)\right]$$

با توجه به حل‌های ۱۰ و ۱۱ شرایط مرزی تأمین شده برای دال‌های اصلی و زیرین مانند زیر قبول می‌شوند.

$$w_1(0)=0 \quad ; \quad w_2(b_2)=0 \qquad (۱۶)$$

با تأمین بخش اول شروط ۸، ۹ و ۱۶، خمیدگی‌های ایجاد شده در محل خطوط $y_1=0$ و $y_2=b_2$ نیز در حل‌های ۱۰ و ۱۱ داخل می‌شوند.

$$\begin{aligned} w_1 = & \sum_m \sum_n B_{mn}^{(1)} \sin\lambda_m x \sin\mu_n y + \\ & + \sum_m \left\{ \left[(1 - y_b) - \upsilon\lambda_m^2 F(y) \right] E_m + \right. \\ & + \left[y_{b_1} + \upsilon\lambda_m^2 \overline{F}(y) \right] \overline{E}_m + \\ & \left. + \frac{1}{D_1} \left[F(y) N_m - \overline{F}(y) \overline{N}_m \right] \right\} \sin\lambda_m x \end{aligned} \tag{۱۷}$$

(۱۸)

$$\begin{aligned} w_2 = & \sum_m \sum_n B_{mn}^{(2)} \sin\lambda_m x \sin\mu_n y + \\ & + \sum_m \left\{ \left[(1 - y_{b_2}) - \upsilon\lambda_m^2 F(y) \right] E_m^* + \right. \\ & + \left[y_{b_2} + \upsilon\lambda_m^2 \overline{F}(y) \right] \overline{E}_m^* + \\ & \left. + \frac{1}{D_2} \left[F(y) N_m^* - \overline{F}(y) \overline{N}_m^* \right] \right\} \sin\lambda_m x \end{aligned}$$

حل‌های مسئله مانند زیر ارائه می‌شوند.

$$\begin{aligned} B_{mn}^{(1)} = & -\frac{8\, q_o (-1)^n}{mn\pi^2 D_1 \Delta_{mn}^2} - E_1(m_1 n)\left[E_m - (-1)^n \overline{E}_m \right] - \\ & - E_2(m_1 n)\left[N_m - (-1)^n \overline{N}_m \right] \end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned} B_{mn}^{(2)} = & -\frac{8\, q_1 (-1)^n}{mn\pi^2 D_2 \cdot D^*(m_1 n)} - E_1^*(m_1 n)\left[E_m^* - (-1)^n \overline{E}_m^* \right] - \\ & - E_2^*(m_1 n)\left[N_m^* - (-1)^n \overline{N}_m^* \right] \end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$E_2(m,n) = \frac{2\lambda_m^4}{n\pi D(m,n)} \left(1 - \upsilon \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - 2\upsilon \right) \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned} E_1^*(m,n) = & \frac{2D_2 \lambda_m^4}{n\pi D^*(m,n)} \times \\ & \times \left[1 - \upsilon \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - 2\upsilon + \frac{K}{D_2 \mu \lambda_m^4} \left(1 - \upsilon \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{K_s}{D\lambda_n^2} \left(1 - \upsilon \frac{\lambda_m^2}{\mu_n^2} - \upsilon \right) \right] \end{aligned} \tag{۲۲}$$

ضرایب سری‌های وارد شده در حل‌های ۱۷ و ۱۸ مسئله نیز با توجه به شرایط اتصال و مرزی مسئله تعیین خواهند شد. با در نظر گرفتن اتصال مفصلی در محل $y_1=0$ دال اصلی و $y_2=b_2$ دال زیرین با دال نگهدارنده جلوئی از شرایط مرزی در حل‌های ۱۷ و ۱۸ موارد زیر حاصل می‌شود.

$$E_m = \overline{E}_m = 0$$
$$E_m^* = \overline{E}_m^* = 0$$

علاوه بر آن با صفر شدن ممان خمشی در محل اتصال مفصلی دال اصلی و زیرین با دال جلوئی، $N_m = 0$ و $\overline{N}_m^* = 0$ تأمین می‌شود. بنابرین کمیت‌های مجهول صرفاً ضرایب سری‌های فوریه N_m و $\overline{N}_m^*$ جدا شده از ممان‌های خمشی ایجاد شده در محل خطوط اتصال دو دال تخت خواهند بود که برای تعیین آنها تأمین شروط اتصال ۵، ۶ و ۷ لازم است. با در نظر گرفتن سختی پیچشی در محل خطوط اتصال دال‌ها بصورت $C=\infty$ شروط اتصال مانند زیر بدست می‌آیند.

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y_1=b_1} = 0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial w_2}{\partial y}\right|_{y_2=b_2} = 0 \tag{۲۳}$$

در این حالت، حل دال‌های اصلی و زیرین به همدیگر وابسته نبوده و به دو مسئله مستقل از هم جدا می‌شوند. الگوریتم حل مسئله بصورت عمومی در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، توجه به معادلات جبری بدست آمده با در نظر گرفتن شروط اتصال بصورت جدا از هم لازم است. با استفاده از حل‌های ۱۰ و ۱۱ دال‌ها، شروط اتصال ۲۳ در معادلات جبری در نظر گرفته می‌شود. بنابراین خواهیم داشت.

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=b} = \sum_m \sum_n B_{mn}^{(1)} \mu_n \sin\lambda_m x \cos\mu_n y \Big|_{y=b} +$$
$$+ \frac{1}{D_1} \sum_m \left[\frac{b_1}{6}(3y_b^2 - 6y_b + 2) N_m(0) - \frac{b_1}{6}(3y_b^2 - 1)\overline{N}_m(1) \right] \sin\lambda_m x \Big|_{y=b}$$

$$\left.\frac{\partial w_2}{\partial y}\right|_{y=0} = \sum_m \sum_n B_{mn}^{(2)} \mu_n \sin\lambda_m x \cos\mu_n y \Big|_{y=0} +$$
$$+ \frac{1}{D_2} \sum_m \left[\frac{b_2}{6}(3y_b^2 - 6y_b + 2) \overline{N}_m^*(1) - \frac{b_2}{6}(3y_b^2 - 1) N_m^*(2) \right] \sin\lambda_m x \Big|_{y=0}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right|_{y=b} = -\sum_m\sum_n B_{mn}^{(1)}\lambda_m^2 \sin\lambda_m x \sin\mu_n y\Big|_{y=b} - \sum_m \frac{1}{D_1}\left[F(y)N_m(0) - \overline{F}(y)N_m(1)\right]\lambda_m^2 \sin\lambda_m x\Big|_{y=b}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right|_{y=b} = -\sum_m\sum_n B_{mn}^{(1)}\mu_m^2 \sin\lambda_m x \sin\mu_n y\Big|_{y=b} + \frac{1}{D_1}\sum_m \left[\left(y_{b_1}-1\right)N_m(0) - y_{b_1}N_m(1)\right]\sin\lambda_m x\Big|_{y=b}$$

$$\left.\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y}\right|_{y=b} = -\sum_m\sum_n B_{mn}^{(1)}\lambda_m^2\mu_n \sin\lambda_m x\cos\mu_n y\Big|_{y=b} - \sum_m \lambda_m^2\left[\frac{b_1}{6}\left(3y_b^2-6y_b+2\right)N_m(1) - \frac{b_1}{6}\left(3y_b^2-1\right)N_m(1)\right]\sin\lambda_m x\Big|_{y=b}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right|_{y=0} = -\sum_m\sum_n B_{mn}^{(2)}\lambda_m^2 \sin\lambda_m x \sin\mu_n y\Big|_{y=0} - \sum_m \frac{1}{D_2}\left[F(y)N_m^*(1) - \overline{F}(y)\overline{N}_m(2)\right]\lambda_m^2 \sin\lambda_m x\Big|_{y=0}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right|_{y=0} = -\sum_m\sum_n B_{mn}^{(2)}\mu_m^2 \sin\lambda_m x \sin\mu_n y\Big|_{y=0} + \sum_m \frac{1}{D_2}\left[\left(y_{b_2}-1\right)N_m^*(1) - y_{b_2}N_m^*(2)\right]\sin\lambda_m x\Big|_{y=0}$$

با لحاظ مقادیر $y=0$ و $y=b$ در توابع و بر اساس اصل تعادل و در نظر گرفتن شروط اتصال، سیستم معادلات جبری زیر بدست می‌آید. با شرط $\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=b} - \left.\frac{\partial w_2}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} &-\sum_n B_{mn}^{(1)}\mu_n + \frac{1}{D_1}\left[-\frac{b_1}{6}N_m(0) - \frac{b_1}{3}N_m(1)\right] - \\ &-\sum_n B_{mn}^{(2)}\mu_n - \frac{1}{D_2}\left[\frac{b_2}{3}N_m^*(1) + \frac{b_2}{6}\overline{N}_m^*(2)\right] = 0 \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

$$\left.C\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y}\right|_{y=b} = D_1\left.\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \upsilon\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)\right|_{y=b} - D_2\left.\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \upsilon\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)\right|_{y=0} \qquad (۲۵)$$

بنابراین معادله جبری زیر بدست می‌آید.

$$C\left\{\sum_n B_{mn}^{(1)}\lambda_m^2\mu_n - \lambda_m^2\left[\frac{b_1}{6D_1}N_m(0) + \frac{b_1}{3D_1}\overline{N}_m(1)\right]\right\} = -N_m(1) + N_m(1) \qquad (۲۶)$$

با جایگزینی حل های ۱۹ و ۲۰ در معادلات ۲۴ و ۲۶ بدست آمده، سیستم معادلات جبری زیر حاصل می‌شود.

$$d_m(0)N_m(0) + d_m(1)N_m(1) + \overline{d}_m(1)\overline{N}_m(1) + d_m(2)N_m(2) = \delta_m \qquad (۲۷)$$

$$N_m(1) - \overline{N}_m(1) = \frac{\delta_c}{\gamma}m^2\pi^2\left[\delta_m^* - d_m^{(0)}N_m(0) - d_m^{(1)}N_m(1)\right] \qquad (۲۸)$$

علائم و نشانه های بکار رفته در محاسبات فوق به صورت زیر می‌باشند.

$$d_m(0) = \left[-\frac{1}{6} + \sum_n n\pi E_2(m,n)\right]\frac{b_1^2}{D_1}$$

$$d_m(1) = \left[-\frac{1}{3} - \sum_n (1)^n n\pi E_2(m,n)\right]\frac{b_1^2}{D_1}$$

$$\overline{d}_m(1) = \left[-\frac{1}{3} + \sum_n n\pi E_2^*(m,n)\right]\frac{b_2^2}{D_2}$$

$$d_m(2) = \left[-\frac{1}{6} - \sum_n (-1)^n n\pi E_2^*(m,n)\right]\frac{b_2^2}{D_2}$$

$$\delta_m = -\frac{8}{m\pi}\sum_n \left(\frac{q_o}{D_1\Delta_{mn}^2} + \frac{q_1}{D_2\cdot D^*(m,n)}\right)(-1)^n$$

$$\delta_c = \frac{C}{aD_1} \quad ; \quad \gamma = \frac{a}{b_1} \; ; \delta_m^* = -\frac{8\,q_o}{m\pi}\sum_n (-1)^n\frac{1}{\Delta_{mn}^2}$$

بدین ترتیب، حل مسئله منجر به حل سیستم معادلات جبری ۲۷ و ۲۸ می‌شود. بررسی و تحلیل این معادلات نشان می‌دهد که معادلات با آنچه برای معادله سه ممان تیرهای پیوسته بدست می‌آیند مشابه می‌باشند، که این خود، حل صحیح مسئله را اثبات می‌نماید. در محاسبات اجرائی می‌توان از المان‌های مقاوم در محل خطوط اتصال دال‌ها صرفنظر نمود که در اینصورت $\delta_c = 0$ خواهد شد. در این حالت در معادله ۲۸ خواهیم داشت.

$$N_m(1) = \overline{N}_m(1)$$

همچنین معادله ۲۷ به شکل زیر در می‌آید.

$$d_m(0)N_m(0) + \left[d_m(1) + \overline{d}_m(1)\right]N_m(1) + \\ + d_m(2)N_m(2) = \delta_m \qquad (۲۹)$$

با در نظر گرفتن اتصال مفصلی بین دال اصلی با دال جلوئی و نیز دال جلوئی با دال زیرین (نقطه 2)، $N_m(0) = N_m(2) = 0$ شده و تعداد مجهولات مسئله نیز کم می‌شود. بنابراین خواهیم داشت.

$$d_m(1)N_m(1) + \overline{d}_m(1)\overline{N}_m(1) = \delta_m \\ N_m(1) - \overline{N}_m(1) = \frac{\delta_c}{\gamma} m^2\pi^2\left[\delta_m^* - d_m(1)N_m(1)\right] \qquad (۳۰)$$

با صرفنظر نمودن از المان‌های مقاوم در محل خطوط اتصال، $\delta_c = 0$ شده و حل مسئله مانند زیر بدست می‌آید.

$$N_m(1) = \overline{N}_m(1) = \frac{\delta_m}{\left[d_m(1) + \overline{d}_m(1)\right]} \qquad (۳۱)$$

با معلوم شدن توابع خمیدگی‌ها، ممان‌های خمشی ایجاد شده در دال اصلی با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شود.

$$M_x = -D_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \upsilon\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right) = \\ = \sum_m \sum_n D_1\left(\lambda_m^2 + \upsilon\mu_n^2\right)B_{mn}^{(1)} \sin\lambda_m x \sin\mu_n y + \\ + \sum_m \left\{\left[F(y)\lambda_m^2 - \upsilon(y_b - 1)\right]N_m(0) - \left[\lambda_m^2\overline{F}(y) - \upsilon y_{b_1}\right]N_m(1)\right\}\times \\ \times \sin\lambda_m x$$

$$M_y = -D_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \upsilon\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = \\ = \sum_m \sum_n D_1\left(\mu_n^2 + \upsilon\lambda_m^2\right)B_{mn}^{(1)} \sin\lambda_m x \sin\mu_n y - \\ - \sum_m \left\{\left[(y_b - 1) - \upsilon F(y)\lambda_m^2\right]N_m(0) - \left[y_b\lambda_m^2 - \upsilon\overline{F}(y) - \lambda_m^2\right]N_m(1)\right\}\times \\ \times \sin\lambda_m x$$

با در نظر گرفتن $a = b_1$ و $a = b_2$ در دیوار حایل، الگوریتم حل مسئله به شکل زیر در می‌آید.

$$E_1(m,n) = \frac{2m^4}{n\pi\left(m^2 + n^2\right)^2}\left(1 - \upsilon\frac{m^2}{n^2} - 2\upsilon\right)$$

$$E_2(m,n) = \frac{2m^2}{n\pi^3\left(m^2 + n^2\right)^2}\left(2 + \frac{m^2}{n^2}\right)$$

$$E_1^*(m,n) = \frac{2m^4}{n\pi\left(m^2 + n^2\right)^2\eta(m,n)}\left[1 - \upsilon\frac{m^2}{n^2} - 2\upsilon + \overline{K}\left(1 - \upsilon\frac{m^2}{n^2}\right) + \right. \\ \left. + \overline{K}_s\left(1 - \upsilon\frac{m^2}{n^2} - \upsilon\right)\right]$$

$$E_2^*(m,n) = \frac{2m^2}{n\pi^3\left(m^2 + n^2\right)^2\eta(m,n)}\times \\ \times\left[12 + \frac{m^2}{n^2} + \frac{\overline{K}}{m^2n^2} + \frac{\overline{K}_s}{n^2}\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)\right]$$

$$\eta(m,n) = \left[1 + \frac{\overline{K}}{\left(m^2 + n^2\right)^2} + \frac{\overline{K}_s}{m^2 + n^2}\right]$$

$$\overline{K} = \frac{Ka^4}{D\pi^4} \quad ; \quad \overline{K}_s = \frac{K_s a^2}{D\pi^2} \quad ; \Delta_{mn}^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2$$

کمیت‌های بکار رفته در حل مسئله مانند زیر تعیین شده است. K و K_s مشخصات الاستیک خاک می‌باشد. K ضریب سختی فشاری خاک بستر و K_s ضریب سختی لغزشی خاک بستر است. همچنین خاک با تراکم متوسط در نظر گرفته شده است.

$$K = 5{,}0\,\frac{kg}{cm^3} \;\; ; \;\; K_s = Ka = 4435\,\frac{kg}{cm^3} \;\; ; \frac{a}{h} = 30 \\ a = 600\,cm \;\; ; \; h = 20\,cm \;\; ; \; E_b = 290000\,\frac{kg}{cm^2}$$

$$\overline{K}=\frac{Ka^4}{D\pi^4}=\frac{12\left(1-\upsilon^2\right)Ka\cdot a^3}{E\cdot\pi^4h^3}=$$
$$=\frac{12\left(1-0{,}17^2\right)\cdot5\cdot600\cdot30^3}{2{,}9\cdot10^5\pi^4}=33{,}42$$

$$\overline{K}_s=\frac{K_sa^2}{D\pi^2}==\frac{4435\cdot12\left(1-\upsilon^2\right)\cdot30^3}{2{,}9\cdot10^5\cdot600\cdot\pi^2}=0{,}818$$

با در نظر گرفتن مقادیر فوق، حل دال‌های مستطیلی نشسته بر روی بستر الاستیک تحلیل می‌شود. بدین ترتیب ضرایب وارد شده در حل مسئله، محاسبه شده و در جداول ۱ تا ٦ ارائه شده است.

جدول ۱. مقادیر Δ^2_{mn}

m \ n	1	2	3
1	4	25	100
3	100	169	324

جدول ۲. مقادیر $\eta(m,n)$

m \ n	1	2	3
1	9,39	2,353	1,342
3	1,342	1,203	1,123

جدول ۳. مقادیر $E_1(m,n)$

m \ n	1	2	3
1	0,078	0,00823	0,00561
3	- 0,459	0,0476	0,0201

جدول ٤. مقادیر $E_1^*(m,n)$

m \ n	1	2	3
1	0,478	0,184	0,00104
3	- 3,439	2,652	1,187

جدول ۵. مقادیر $E_2(m,n)$

m \ n	1	2	3
1	0,0477	0,00286	0,000448
3	0,0187	0,00455	0,00136

جدول ٦. مقادیر $E_2^*(m,n)$

m \ n	1	2	3
1	0,0603	0,00342	0,000375
3	0,0628	0,00448	0,00179

با استفاده از این پارامترهای کمکی ضرایب سیستم معادلات جبری محاسبه می‌شود.

$$d_1(1)=-\frac{1}{3}-\sum_m\ (-1)^n n\pi E_2(m,n)=-0{,}333+3{,}1415(0{,}0477-$$
$$-2\cdot0{,}00289+3\cdot0{,}000448)=-0{,}333+0{,}136=-0{,}197;$$
$$\overline{d}_1(1)=-\frac{1}{3}+\sum_m\ n\pi E_2^*(m,n)=-0{,}333+3{,}1415(0{,}0603+$$
$$+2\cdot0{,}00342+3\cdot0{,}000975)=-0{,}333+0{,}220=-0{,}113$$
$$\delta_1=-\frac{8}{m\pi}\sum_m\left(\frac{q_o}{\pi^4\left(m^2+n^2\right)^2}+\frac{q_1}{\pi^4\left(m^2+n^2\right)^2\eta(m,n)}\right)(-1)^n=$$
$$=-\frac{8}{\pi}[(-0{,}00257+0{,}00041-0{,}0001)q_o+(-0{,}00273+0{,}000172-$$
$$-0{,}000077)q_1]=0{,}00628\frac{q_oa^4}{D_1}$$
$$\delta_3=-\frac{8}{3\pi}(-0{,}00010+0{,}000061-0{,}0000316)q_o+(-0{,}000075+$$
$$+0{,}000047-0{,}000068)q_1=\frac{8q_o}{3\pi}(0{,}000478+0{,}000290)=$$
$$=0{,}0000652\frac{q_oa^4}{D_1}$$
$$d_3(1)=-0{,}333+3{,}14156(0{,}0187-2\cdot0{,}00455+3\cdot0{,}00136)=$$
$$=-0{,}333+0{,}043=-0{,}29$$
$$\overline{d}_3(1)=-0{,}333+3{,}14156(0{,}0628+2\cdot0{,}00448+3\cdot0{,}00179)=$$
$$=-0{,}333+0{,}242=-0{,}091$$

$$\delta_c=\frac{C}{aD_1}=\frac{GJ_p\cdot12\left(1-\upsilon^2\right)}{Eh^3\cdot a}=\frac{E\cdot\alpha\ b_o^3h_o\cdot12\left(1-\upsilon^2\right)}{2\left(1+\upsilon\right)Eh^3\cdot a}$$
$$\delta_c=\frac{C}{aD_1}=\frac{6\left(1-\upsilon\right)\alpha\ b_o^3h_o}{ah^3}=\frac{6\left(1-0{,}17\right)\cdot0{,}209\cdot30^3}{60}=15{,}6$$
$$\gamma=\frac{a}{b_1}=1\ \ ;\ \upsilon=0{,}17$$
$$\delta_m^*=-\frac{8\ q_o}{m\pi}\sum_n\ (-1)^n\frac{1}{\pi^4\left(m^2+n^2\right)^2}$$
$$\delta_1^*=-\frac{8\ q_o}{\pi^5}(0{,}25+0{,}04-0{,}01)=0{,}00576$$
$$\delta_3^*=-\frac{8\ q_o}{3\cdot\pi^5}(0{,}01+0{,}00591-0{,}00308)=0{,}0000625$$

با در نظر گرفتن مقادیر بالا، سیستم معادلات جبری مسئله مانند زیر نوشته می‌شود.

در صورتیکه $m=1$ در نظرگرفته شود، خواهیم داشت.

$$-0,197\frac{a^2}{D}N_1(1)-0,113\frac{a^2}{D}N_1(1)=0,00628\frac{qa^4}{D}$$
$$N_1(1)-\overline{N}_1(1)=154,0\left(0,00576+0,197N_1(1)\right)$$

و در نتیجه:

$$N_1(1)=-0,03006\,qa^2$$
$$\overline{N}_1(1)=-0,00501\,qa^2$$

در صورتیکه $m=3$ در نظرگرفته شود، خواهیم داشت.

$$-0,29\frac{a^2}{D}N_3(1)-0,091\,\overline{N}_3(1)=0,00652\frac{qa^4}{D}$$
$$N_3(1)-\overline{N}_3(1)=1386\left(0,0000625+0,29N_3(1)\right)$$

و در نتیجه:

$$N_3(1)=-0,00204\,qa^2$$
$$\overline{N}_3(1)=-0,000491\,qa^2$$

ضرایب سری‌های دوبل مسئله نیز با استفاده از روابط ۱۳ و ۱۵ تعیین می‌شوند.

$$B_{mn}^{(1)}=\left[-\frac{8\,q_o(-1)^n}{mn\pi^6\left(m^2+n^2\right)^2}+E_2(m,n)(-1)^n N_m(1)\right]\frac{qa^4}{D}$$

جدول ۷. مقادیر $B_{mn}^{(1)}$

m \ n	1	2	3	$N_m(1)$
1	0,00351	0,000252	0,0000412	- 0,0306
3	0,0000658	0,0000178	0,00000562	- 0,00204

در صورتیکه محل اتصال دال اصلی با دال زیرین بصورت مفصلی در نظرگرفته شود، ضرایب سری‌های دوبل مسئله برای دال اصلی مانند زیر محاسبه شده و در جدول ۸ آورده شده است.

$$B_{mn}^{(1)}=-\frac{8\,q_o(-1)^n}{mn\pi^6\left(m^2+n^2\right)^2}\cdot\frac{q_o a^4}{D}$$

جدول ۸. مقادیر $B_{mn}^{(1)}$

m \ n	1	2	3
1	0,00208	- 0,000166	0,0000277
3	0,0000277	- 0,0000082	0,00000285

پس از تعیین ضرایب سری‌ها، خمیدگی‌ها و ممان‌های خمشی ایجاد شده در دال اصلی با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$w_1=\sum_m\sum_n B_{mn}^{(1)}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y-$$
$$-\frac{1}{D_1}\sum_m N_m(1)\overline{F}(y)\sin\lambda_m x$$
$$M_y=D_1\sum_m\sum_n\left(n^2+\upsilon m^2\right)B_{mn}^{(1)}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y+$$
$$+\sum_m\left[y_b-\upsilon\overline{F}(y)\lambda_m^2\right]N_m(1)\Big\}\sin\lambda_m x$$

مقادیر بدست آمده برای خمیدگی‌ها و ممان‌های خمشی ایجاد شده در دال اصلی در محل برش $x=0,5\,a$ در جدول ۹ نوشته شده است.

جدول ۹. مقادیر خمیدگی‌ها و ممان‌های خمشی

y_b	$10^{-2}w\frac{qa^4}{D}$	$10^{-2}My\,qa^2$
0,0	0,0	0,0
0,1	0,877	1,05
0,2	1,798	1,48
0,3	1,283	2,089
0,4	1,563	2,500
0,5	1,690	2,600
0,6	1,617	2,331
0,7	1,330	1,670
0,8	0,900	0,443
0,9	0,400	- 1,10
1,0	0,0	- 2,80

ضرایب سری‌های مسئله برای دال زیرین نیز مانند زیر محاسبه شده و در جدول ۱۰ آورده شده است.

$$B_{mn}^{(2)} = -\frac{8\,q_o(-1)^n}{mn\pi^6\left(m^2+n^2\right)^2\eta_{mn}} - E_2^*(m,n)\overline{N}_m(1)$$

جدول ۱۰. مقادیر $B_{mn}^{(2)}$

m \ n	1	2	3	$\overline{N}_m(1)$
1	0,000523	+ 0,0000876	0,0000255	- 0,00501
3	0,0000236	0,0000702	0,00000343	- 0,00049

با در نظر گرفتن اتصال مفصلی بین دال اصلی با دال زیرین، ضرایب سری‌های مسئله برای دال زیرین در جدول ۱۱ محاسبه شده است.

مقادیر بدست آمده برای خمیدگی‌ها و ممان‌های خمشی ایجاد شده در دال زیرین نسبت به مقادیر مندرج در جدول ۹ در محل برش $x=0,5\,a$ در جدول ۱۲ نوشته شده است.

مقایسه نتایج بدست آمده در جداول ۷، ۸، ۱۰ و ۱۱ و نیز جداول ۹ و ۱۲ نشان می‌دهد که سختی دال زیرین بعلت قرار گرفتن برروی بستر الاستیک نسبت به دال تخت اصلی مقابل فشار خاک، به مقدار ده برابر و خمیدگی‌ها و ممان‌های خمشی نیز هشت الی ده برابر کمتر می شوند. در صورتیکه ضخامت دال زیرین از ضخامت دال اصلی نسبتاً زیاد در نظر گرفته شود، صلبیت خمشی آن بیشتر می‌شود. برای ساده‌تر شدن حل مسئله، اتصال دال اصلی با دال زیرین صلب و گیردار در نظر گرفته می‌شود. در این حالت شرایط مرزی و اتصال مانند زیر خواهد بود. شرایط مرزی دال اصلی در محل خط $y_1=b_1$ مانند زیر تعیین می‌شود.

$$w_1(b_1)=0 \quad ; \quad \left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=b_1}=0$$

با استفاده از این شروط، سیستم معادلات جبری زیر بدست می‌آید.

جدول ۱۱. مقادیر $B_{mn}^{(2)}$

m \ n	1	2	3
1	0,000221	+ 0,0000705	0,0000206
3	0,0000206	+ 0,00000681	0,00000255

جدول ۱۲. مقادیر خمیدگی‌ها و ممان‌های خمشی

y_b	$10^{-3}\,w\frac{qa^4}{D}$	$10^{-2}\,My\;qa^2$
0,0	0,0	- 0,452
0,1	0,036	- 0,099
0,2	0,092	0,182
0,3	0,204	0,347
0,4	0,216	0,384
0,5	0,2170	0,317
0,6	0,214	0,105
0,7	0,812	0,0784
0,8	0,132	- 0,0036
0,9	0,0225	- 0,0162
1,0	0,0	0,0

$$-\frac{1}{D}\frac{b_1}{3}N_m(1)=\sum_n \mu_n B_{mn}^{(1)}$$

$$\left[-\frac{b_1}{3D_1}-\sum_n n\pi(-1)^n E_2(m,n)\right]\cdot N_m(1)=-\sum_n \frac{8\,q_o(-1)^n}{m\pi D_1 A_{mn}^2}$$

$$d_1(m)\,N_m(1)=\delta_m$$

بدین ترتیب، حل مسئله تعیین می‌شود.

$$N_{(m)}(1)=\frac{8\,q\,a^2(-1)^n}{\left(-\frac{1}{3}-\sum_n n\pi E_2(m,n)\right)}\cdot\frac{1}{mn^5\left(m^2+n^2\right)^2} \qquad (۳۲)$$

همچنین مقادیر ضرایب سری‌ها مانند زیر بدست می‌آید.

$$N_1(1)=-0,03001\,qa^2$$

$$N_3(1) = -0{,}00215 \cdot q_o a^2$$

نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که سختی دال زیرین در مقایسه با دال اصلی بسیار بزرگتر است. به همین ترتیب برای دال زیرین با در نظر گرفتن اتصال صلب در محل خط $y_2=0$ ، حل زیر بدست می‌آید.

$$\overline{N}_{(m)}(1) = -\frac{8\, q_o\, a^2}{-\frac{1}{3} + \sum_n n\pi E_2^*(m,n)} \cdot \frac{1}{mn^5\, \eta_{mn} \cdot (m^2+n^2)^2} \qquad (۳۳)$$

محاسبات ارائه شده در این مقاله براساس روش نظری و بر پایه اصول استوار و دقیق ریاضی انجام شده است. روش‌های نظری بر پایه اصول ریاضی و مکانیک اثبات شده مهندسی جز روشهای سخت و پیچیده و در عین حال دقیق محاسباتی محسوب می‌شوند، بطوریکه روش‌های محاسباتی دقیق نظری معمولا مبنای برنامه نویسی نرم‌افزارهای محاسباتی و برای اعتبارسنجی روش‌های تقریبی و نتایج حاصل از محاسبات نرم افزاری به کار می‌روند (Majidpourkhoei, 2025). درعین حال می‌توان نمونه‌های تجربی و شبیه‌سازی شده برای ساختار جدید ارائه نمود که از حوصله این مقاله خارج بوده و برای مطالعات و مقالات آتی توصیه می‌شود. معادلات ریاضی تشریح کننده سازه جدید از آنالیز یک ساختار پیشنهاد شده واقع گرایانه مبتنی بر اصول مهندسی حاکم بر دیوارهای حائل به دست آمده است، که می‌تواند بعنوان تحقیقات بعدی توسط برنامه های رایانه ای نیز پیاده سازی و مقایسه گردد.

۵-نتیجه‌گیری

کاربرد ساختارهای صفحه ای در سازه جدید پیشنهاد شده برای سبک سازی دیوارهای حایل وزنی بتنی با توجه به صرفه جوئی قابل ملاحظه در مصرف بتن (حدود ۹۰ درصد) اهمیت ویژه‌ای به این پژوهش داده است. از طرفی برای اولین بار محاسبه و آنالیز یک نوع فرم سازه‌ای جدید از دیوارهای حائل سبک سازی شده مرکب از دال‌ها ارائه گردیده است. برای آنالیز صفحات، روشهای گوناگونی وجود دارد، چگونگی کاربرد هر یک از این اصول بستگی به شکل هندسی، جنس صفحه، کاربرد صفحه و شرایط مرزی و نیز بارهای وارده دارد. برای آنالیز و محاسبهٔ دیوار حائل جدید مرکب از صفحات مسطح به معادلاتی نیاز است که در ضمن اینکه با دقت لازم رفتار مکانیکی سازه را ارائه می‌دهد از لحاظ ریاضی نیز قابل حل باشد، برای رسیدن به این منظور به روش پیشنهاد شده در این پژوهش می‌توان عمل نمود. در این مقاله ریاضیات بکار رفته، فهم فیزیکی رفتار صفحه‌ها در ساختار پیشنهاد شده را به صورت واضح ارائه می‌دهد، همچنین مسئله حل شده نقش مؤثری در جذب و درک مفاهیم اصلی و کاربرد عملی آنها دارد. خمش صفحه‌های مستطیلی سازه ارائه شده در این مسئله منجر به حلهائی در فرم سری ها شده است. بعبارت دیگر خمیدگی‌ها و ممان‌ها با سری‌هائی بیان و حل شده اند. همچنین با افزایش تعداد عبارت‌ها در سری‌های ارائه شده، دقت بیشتر شده است. مقایسه نتایج بدست آمده در جداول این پژوهش نشان می‌دهد که سختی دال زیرین بعلت قرار گرفتن برروی بستر الاستیک نسبت به دال تخت اصلی مقابل فشار خاک، به مقدار ده برابر و خمیدگی‌ها و ممان‌های خمشی نیز هشت الی ده برابر کمتر می‌شوند. همچنین با افزایش ضخامت دال تخت زیرین صلبیت خمشی آن بیشتر می‌شود. بعبارت دیگر با زیاد شدن ضخامت دال زیرین محاسبات مربوط به آن مانند دال کاملا صلب در نظر گرفته می‌شود.

٦- مراجع

-Apipah, A.N., & Raharjo, B.V. (2025). Optimization of retaining wall for prevention and mitigation of riverbank erosion disasters in creating sustainable development, case study: Cisadane river in Tangerang. *In IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, *IOP Publishing,* 1564(1), 012044. **doi.org/10.1088/1755-1315/1564/1/012044**

-Ciarlet, P.G. (2022). Mathematical elasticity: theory of shells. Volume 3, *Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics Publishing.* **doi.org/10.1137/1.9781611976823**

-Gohnert, M. (2022). Shell structures-theory and application. *Switzerland: Springer International Publishing.* **doi.org/10.1007/978-3-030-84807-1**

-Majidpourkhoei, A. (2025). Solving of three interconnected shells of the new retaining structure by theoretical method for stabilizing road trenches. *Journal of Transportation Research*, 22(3), 431-444. **doi.org/10.22034/tri.2024.466410.3257**

Majidpourkhoei, A. (2024). A survey of development on the analysis methods and the theories of shells. *Journal of Civil Engineering and Materials Application*, 8(2), 83-97. **doi.org/10.22034/jcema.2024.472121.1138**

Engineering: Interdisciplinary and Integrated Solutions for Sustainable Offshore Infrastructure, Springer Nature, 431-437.
doi.org/10.1007/978-981-96-3912-0_41
-Rhayma, N., Khorchani, M., & Breul, P. (2025). Reliability and sensitivity analysis of gravity retaining wall Stability: Investigating the effect of construction defects. *Journal of Rehabilitation in Civil Engineering*, 13(1), 113-129.
doi.org/10.22075/jrce.2024.32797.1964
-Rusadi, I., & Kabdiyono, E.A. (2025). Cantilever type retaining wall design. *Jurnal Ilmiah Teknik*, 4(3), 62–81. **doi.org/10.56127/juit.v4i3.2286**
-Timoshenko, S., & Woinowsky–Krieger, S. (1959). Theory of plates and shells. Second Edition, *New York: McGraw Hill.*
-Ugural, A.C. (1981). Stresses in plates and shells. *New York: McGraw Hill.*
-Yang, R., Gan, F., Zheng, G., Wang, H., Bi, J., Liu, B., & Zhang, Y.Y. (2026). Experimental study on mechanical behavior and working mechanism of unloading pile-sheet retaining walls. *Rock and Soil Mechanics*, 47(5), 1672-1685.
doi.org/10.26599/RSM.2025.00348
-Majidpourkhoei, A. (2024). Calculation on stability and common proportions of the new retaining wall formed from cylindrical shells. *Journal of Materials and Environmental Science*, 15(1), 42-54.
-Majidpourkhoei, A. (2024). The use of shells in the body of cities as the soul of Iranian structures with Islamic identity. *Third International Conference on Architecture & Civil Engineering & Urban Development & Environment and Horizons of Islamic Art in the Second Step Statement of the Revolution*, Tabriz Islamic Art University, Tabriz, Iran.
-Majidpourkhoei, A. (2015). Offer new shell retaining walls to improve methods for stabilizing trenches urban roads with the approach of Islamic identity to urban space. *Third International Congress on Civil Engineering & Architecture and Urban Development*, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.
-Majidpourkhoei, A. (2015). Problem solving of the new buttress retaining wall composed of reservoirs shell and forces imposed on them. *Indian Journal of Fundamental and Applied Life Sciences*, 5(S3), 1295-1302.
-Mittelstedt, C. (2023). Theory of plates and shells. *Berlin: Springer Vieweg Publishing.*
doi.org/10.1007/978-3-662-66805-4
-Pham, Q.H., & Do, Q.T. (2025). On optimization of gravity retaining wall considering the dimension of the stone base. *In Proceedings of the 3rd Vietnam Symposium on Advances in Offshore*

Modeling and Analysis of three Flat Slabs Connected Together in a New Lightweight Retaining Wall Based on Mathematical Principles

Ali Majidpourkhoei, *Department of Civil Engineering,*
Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

E-mail: amajidpour@tvu.ac.ir

Received: May 2026- Accepted: November 2026

ABSTRACT
The widespread use of plate structures in construction projects due to their lightness, strength and economic efficiency doubles the importance of using them. In this study, in order to reduce the upward trend of the thickness of concrete gravity retaining walls and consequently reduce the upward trend of the materials consumed for increasing the height of the wall, flat slabs are adapted to concrete gravity retaining walls and a new type of lightweight retaining wall is proposed. Then, an attempt has made to provide the basis of plate theory and the physical and mathematical aspects of the topics and its application in the studies conducted for the new retaining wall, and the governing equations for the proposed problem state is present. The results show that the new retaining wall will be significantly more economical in terms of concrete consumption. In general, in this study, a new method based on mathematical principles presented for calculating and analyzing a lightweight retaining wall composed of flat slabs.

Keywords: Concrete Gravity Retaining Walls, Flat Slabs, Lightened Retaining Wall, Plates Analysis